А. В. Булинский, А. Н. Ширяев

Теория случайных процессов

Оглавление

Лекция 1. Случайные функции и их распределения

Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи. Случайные элементы и их распределения. Цилиндрическая σ-алгебра $\mathcal{B}_T$. Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Описание $\mathcal{B}_T$ для бесконечного T. Согласованность проекций меры. Формулировка теоремы Колмогорова. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями. Эмпирические меры, процессы частных сумм, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга, пуассоновская случайная мера. Эквивалентные случайные функции.

Важнейшей особенностью современной теории вероятностей является то, что ее методы и результаты представляют не только самостоятельный математический интерес, но и находят разнообразные приложения в других научных дисциплинах, таких как физика, химия, биология, финансовая математика и др., а также в технике. **В чем же специфика того раздела теории вероятностей, который называется случайными процессами?**

Вначале теория вероятностей имела дело со случайными экспериментами (подбрасывание монеты и т. п.), в которых изучалось, произошло или нет какое-либо явление («событие»). Затем возникло понятие случайной величины, которое позволило количественно описывать результаты проводимых экспериментов, например, выигрыш в лотерее. Наконец, **в случайные эксперименты был явно введен фактор времени**, т. е. появилась возможность строить модели, описывающие динамику развития изучаемого случайного явления. Иначе говоря, исходы ω случайных экспериментов, которые рассматриваются в теории случайных процессов, представляют собой некоторые функции.

Прежде чем переходить к систематическому изложению курса, упомянем **несколько принципиальных задач**, большинство из которых будет рассмотрено в этих лекциях.

1. Какую математическую модель можно предложить для описания "хаотического" движения, скажем, цен акций или движения частиц цветочной пыльцы в воде? Совершенно нетривиальные **модели диффузии** изучались Башелье, Эйнштейном, Смолуховским, Ланжевеном, Винером, Колмогоровым и другими учеными. Мы увидим, что в конструкции броуновского движения, используемого для описания "хаотичности" соответствующие траектории, являющиеся непрерывными, оказываются недифференцируемыми ни в одной точке.

2. В связи с предыдущим пунктом возникает вопрос, зачем могут понадобиться такие экзотические процессы? Мы покажем, что на основе процессов подобного типа могут быть решены очень важные **«неслучайные» задачи, например, задача Дирихле:** найти гармоническую в области $G \subset \mathbb{R}^d$ функцию, которая принимает заданные значения на границе этой области (далее мы уточним формулировку).

3. Будет объяснено, как изучение функционалов от броуновского движения позволяет, например, доказать знаменитый **критерий согласия Колмогорова**, излагающийся в курсе математической статистики.

4. Упомянутые в пункте 1 процессы стимулировали развитие **теории стохастических дифференциальных уравнений**, требующей, как будет ясно в дальнейшем, особого «стохастического исчисления». Где могут пригодиться подобные уравнения? В частности, изучая такого рода уравнения, можно предложить эффективный способ (применяемый на практике!) **выделения** («фильтрации») полезного сигнала, скрытого в помехах(«шум»).

5. Очевидна важность **задачи прогноза:** на основании наблюдений случайного процесса до момента времени t требуется предсказать его поведение в моменты $t+s$ ($s>0$). Такие задачи возникают, например, при анализе флуктуаций курсов ценных бумаг на финансовом рынке. В этой связи большой интерес представляет задача об опционах (модель купли-продажи акций через фиксированное время по заранее установленной цене, когда истинная цена подвержена случайным колебаниям).

6. Наконец, упомянем разнообразные **задачи асимптотического анализа случайных объектов**. В качестве примера укажем на выводимые в курсе **формулы Эрланга**, позволяющие представить, что будет происходить «при больших временах» в модели, описывающей функционирование телефонной станции, куда в случайные моменты времени поступают вызовы, причем длительности разговоров абонентов также случайны.

Подчеркнем, что в пунктах 1, 4–6 мы сталкиваемся с трудностями двух типов. Во-первых, **требуется создать содержательную математическую модель изучаемого явления**, а во-вторых, **точно поставить задачу и решить ее**. Для этого требуется весьма существенное развитие теории. При знакомстве с основами этой теории мы убедимся, что **применяемые методы и получаемые с их помощью результаты, как правило, ориентированы на исследование определенных классов случайных процессов**.

Обратимся к понятию случайного процесса $\{X(t),\, t\in T\}$. Проще всего сказать, что в каждый момент времени t мы имеем дело с действительной случайной величиной $X(t)$, описывающей изучаемый объект. С какими сложностями приходится сразу столкнуться на этом пути? Если мы хотим изучать не только то, что происходит в один фиксированный момент t, а хотя бы то, что совершается в любые два момента t_1 и t_2 из рассматриваемого промежутка, то видим, что **все случайные величины $X(t)$ должны быть заданы на одном и том же вероятностном пространстве** $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Иначе было бы бессмысленно говорить, например, о вероятности того, что $|X(t_1)-X(t_2)|<a$, где a — некоторое положительное число. Кроме того, естественно считать, что поведение процесса может отражать влияние предыстории на дальнейшее развитие, т. е. для каждого t поведение процесса после данного момента в каком-то смысле связано с его поведением до момента t. Итак, возникает необходимость описывать влияние одной совокупности случайных величин на другую совокупность случайных величин. Пока мы не обсуждаем, в каких терминах это возможно делать и удастся ли при этом задать все $X(t)$ на некотором $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Более того, даже для семейства случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве, следует выяснить, можно ли говорить о вероятности того, что значения процесса, т. е. величины $X(t)$, будут лежать в каком-то заданном подмножестве пространства всех функций, определенных на изучаемом промежутке времени.

Заметим также, что многие интересные задачи связаны с исследованием поведения случайных объектов, изменяющихся не только во времени, но и в пространстве (например, метеорологические данные измеряются в моменты t в точках $z\in\mathbb{R}^3$). Подчеркнем, что случайные величины, характеризующие состояние случайного объекта, также не обязаны быть скалярными. Более того, имеются интересные модели, описывающие происходящие довольно сложным образом случайные изменения изучаемой системы в случайные моменты времени (например, модели взаимодействующих частиц).

Таким образом, естественно обратиться к **общей схеме изучения семейства случайных величин (необязательно действительных) $X(t)$, параметризованных элементом t некоторого абстрактного множества T и заданных на**

некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для этой цели потребуется **понятие случайной величины со значениями в множестве** $\mathcal{X}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ — *измеримые пространства*, здесь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ – некоторые σ-алгебры подмножеств Ω и $\mathcal{X}$ соответственно ($\Omega \neq \emptyset$ и $\mathcal{X} \neq \emptyset$). Отображение $X\colon \Omega \to \mathcal{X}$ называется $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$-*измеримым* (пишем $X \in \mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$) , если $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$, т. е. $X^{-1}(B) := \{\omega\colon\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ для любого $B \in \mathcal{B}$. При этом X называется *случайным элементом* (с.э.), если на $\mathcal{F}$ задана вероятность P, т. е. имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. **Вероятностные меры будем называть просто мерами**, специально оговаривая противное.

Для семейства $\mathcal{M}$ подмножеств $\mathcal{X}$ обозначим $\sigma\{\mathcal{M}\}$ наименьшую σ-алгебру (с единицей $\mathcal{X}$), содержащую $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{X}$ — топологическое, в частности, метрическое пространство, то *борелевская σ-алгебра* $\mathcal{B}(\mathcal{X}) := \sigma\{\mathcal{M}\}$, где $\mathcal{M}$ — совокупность открытых множеств в $\mathcal{X}$. При $\mathcal{X} = \mathbb{R}^k$ (с евклидовой метрикой) и $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, если $k > 1$, то $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$-измеримый с.э. X называется *случайным вектором*, а если $k = 1$, — (действительной) *случайной величиной*. Вместо с.э. часто говорят случайная величина или вектор со значениями в $\mathcal{X}$, даже когда $\mathcal{X}$ отлично от $\mathbb{R}^k$.

Лемма 1.1. *Пусть $X\colon \Omega \to \mathcal{X}$ (отображение X не предполагается измеримым относительно каких-либо σ-алгебр) и $\mathcal{M}$ — некоторая совокупность подмножеств $\mathcal{X}$. Тогда X является $\mathcal{A}\,|\,\sigma\{\mathcal{M}\}$-измеримым отображением, где*

$$\mathcal{A} := \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\}.$$

При этом $\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$.

□ Легко видеть, что семейство множеств $\mathcal{D} := \{D \subset \mathcal{X}\colon\ X^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$ есть σ-алгебра, т. к. взятие прообраза сохраняет теоретико-множественные операции и $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй. По построению $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$, следовательно, $\sigma\{\mathcal{M}\} \subset \mathcal{D}$, и значит, $X \in \mathcal{A}\,|\,\sigma\{\mathcal{M}\}$, т. е. $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\}) \subset \mathcal{A}$. Очевидно, $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$, причем $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$ есть σ-алгебра. Поэтому $\mathcal{A} = \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$. Итак, $\mathcal{A} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$. □

Следствие 1.2. *Пусть $X\colon\ \Omega \to \mathcal{X}$ и $\mathcal{F}$ – σ-алгебра в Ω. Если $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$ для некоторой совокупности $\mathcal{M}$ подмножеств $\mathcal{X}$, то $X \in \mathcal{F}|\sigma\{\mathcal{M}\}$.*

□ Применим лемму 1.1, учитывая, что $\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset \mathcal{F}$. □

Смысл следствия 1.2 состоит в том, что **для доказательства $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$-измеримости** X необязательно рассматривать прообразы всех множеств из $\mathcal{B}$, а **достаточно лишь убедиться, что $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для всех $B \in \mathcal{M}$, если $\mathcal{B} = \sigma\{\mathcal{M}\}$**. Именно поэтому в определении случайного вектора X со значениями в $\mathbb{R}^k$ достаточно требовать, чтобы для любого $z \in \mathbb{R}^k$ множество

$$\{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant z\} := \{\omega\colon\ X_1(\omega) \leqslant z_1, \ldots, X_k(\omega) \leqslant z_k\} \in \mathcal{F}.$$

Замечание 1.3. Полезно представлять, что **σ-алгебра может порождаться не только множествами, но и функциями**. Так, запись $\mathcal{A} = \sigma\{X_t,\, t \in T\}$, где $X_t : \Omega \to \mathcal{X}_t$, $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ – измеримые пространства, $t \in T$, означает, что $\mathcal{A}$ – наименьшая σ-алгебра подмножеств Ω, такая что $X_t \in \mathcal{A}|\mathcal{B}_t$ для каждого $t \in T$. Легко видеть, что

$$\mathcal{A} = \sigma\{X_t^{-1}(B_t),\ B_t \in \mathcal{B}_t,\ t \in T\},$$

и если $X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ для $t \in T$, то, очевидно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

Определим *случайную функцию* (с.ф.) **как семейство с.э., заданных на некотором** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Точнее говоря, пусть $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t),\ t \in T\}$ — некоторая совокупность измеримых пространств. Тогда **случайная функция** $X = X(t,\omega)$ **есть функция двух аргументов, действующая из** $T \times \Omega$ **в** $\bigcup_{t\in T} \mathcal{X}_t$, **такая что** $X(t,\omega)$ **при каждом фиксированном** $t \in T$ **является** $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_t$**-измеримым с.э. со значениями в** $\mathcal{X}_t$. Функцию $X(t,\omega)$ при фиксированном ω называют *траекторией, реализацией* или *выборочной функцией*. Аргумент ω в записи с.ф. обычно опускают и пишут просто $X(t)$ или X_t. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время и случайную функцию называют *случайным процессом* (или *случайной последовательностью*, когда $T \subset \mathbb{Z}$). Если $T \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, то говорят о *случайном поле*. Случайным процессом называют и любую с.ф. (не только для $T \subset \mathbb{R}$), если это не вызывает недоразумений. Здесь же заметим, что далее появятся примеры случайных функций, индексированных семейством подмножеств некоторого множества. Вообще, классификация случайных функций, основанная на структуре параметрического множества T или на типах пространств $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$, в произведении которых лежат траектории этих функций, не является всеобъемлющей. Дело в том, что при описании тех или иных явлений **на первый план выступают разумные свойства используемых** (изучаемых) **процессов**. Именно поэтому вводятся обширные (вообще говоря, пересекающиеся) классы случайных функций, например, процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы, мартингалы и т.д.

Сейчас мы более пристально рассмотрим исходное определение случайной функции.

Оказывается, **случайную функцию** (т. е. семейство с.э.) **удобно рассматривать и как один с.э. на** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **со значениями в соответствующем измеримом пространстве функций, заданных на** T. Нам понадобятся новые понятия.

Для $U \subset T$ (U может совпадать с T) определим *произведение пространств*

$$\mathcal{X}_U = \prod_{t\in U} \mathcal{X}_t \tag{1.1}$$

как совокупность функций y, заданных на U и таких что $y(t) \in \mathcal{X}_t$ для каждого $t \in U$ (пример того, что не всегда естественно брать $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$ при каждом $t \in T$ рассмотрен в конце лекции).

Если $V \subset U \subset T$, введем отображение («проектирование») $\pi_{U,V} \colon \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}_V$, положив $\pi_{U,V}\, y = y|_V$, $y \in \mathcal{X}_U$, т. е. взяв сужение на V функции y, заданной на U (рис. 1.1).

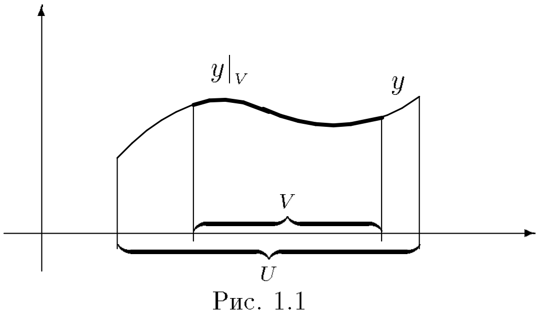

Рис. 1.1

Фиксируем $t \in U$ и $B_t \in \mathcal{B}_t$. Определим в $\mathcal{X}_U$ *«элементарный цилиндр»* $C_U(t, B_t) := \{y \in \mathcal{X}_U \colon\ y(t) \in B_t\}$, т. е. возьмем функции, заданные на U, которые в точке t

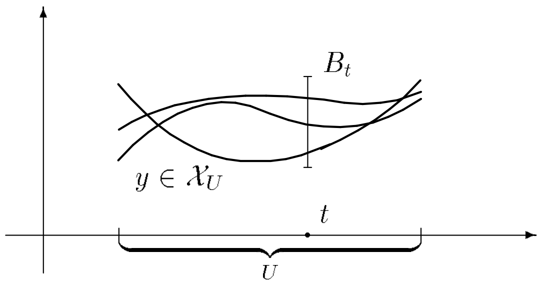

Рис. 1.2

проходят через «ворота» B_t (см. рис. 1.2). Заметим, что $C_U(t, B_t) = \pi_{U,t}^{-1} B_t$, где $\pi_{U,t} := \pi_{U,\{t\}}$ для точки $t \in U$.

Введем в $\mathcal{X}_U$ *цилиндрическую* σ*-алгебру* $\mathcal{B}_U$, порожденную всевозможными элементарными цилиндрами, т. е.

$$\mathcal{B}_U = \sigma\{\pi_{U,t}^{-1}\mathcal{B}_t,\ t \in U\}. \tag{1.2}$$

В соответствии с замечанием 1.3 можно сказать, что $\mathcal{B}_U$ порождается **координатными отображениями** $\pi_{U,t}$, $t \in U$. Далее (теорема 1.5) мы увидим, что та же σ**-алгебра** $\mathcal{B}_U$ **порождается всевозможными** *цилиндрами*, т.е. множествами вида $\pi_{U,V}^{-1} B_V$, где V – конечное подмножество U, а *основание цилиндра* $B_V \in \mathcal{B}_V$.

Теорема 1.4. *С.ф.* $X = X(t,\omega)$, *т. е. семейство* $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_t$*-измеримых с.э.* $X(t,\cdot)$, $t \in T$, *может рассматриваться как* $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_T$*-измеримое отображение* $\mathbf{X}\colon\ \Omega \to \mathcal{X}_T$, *сопоставляющее* $\omega \in \Omega$ *траекторию* $X(\cdot,\omega)$, *т. е.*

$$\omega \xrightarrow{\mathbf{X}} X(\cdot,\omega). \tag{1.3}$$

Обратно, если отображение (1.3) *является* $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_T$*-измеримым, то* $\{X(t,\cdot),\ t \in T\}$ *есть семейство* $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_t$*-измеримых с.э.*

□ Возьмем произвольный элементарный цилиндр $C_T(t, B_t)$, $t \in T$, $B_t \in \mathcal{B}_t$. Тогда $\mathbf{X}^{-1}(C_T(t, B_t)) = \{\omega\colon\ X(t,\omega) \in B_t\} \in \mathcal{F}$, поскольку $X(t,\cdot)$ есть $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_t$-измеримое отображение. Остается учесть (1.2) и воспользоваться следствием 1.2.

Обратно, если $\mathbf{X}$ задается формулой (1.3), то $X(t,\omega) = \pi_{T,t}\mathbf{X}(\omega)$. Из леммы 1.1 вытекает, что

$$\pi_{U,V}^{-1}(\mathcal{B}_V) \subset \mathcal{B}_U \quad \text{для} \quad V \subset U \subset T, \tag{1.4}$$

т. е. $\pi_{U,V} \in \mathcal{B}_U\,|\,\mathcal{B}_V$ (прообраз элементарного цилиндра из $\mathcal{X}_V$ есть элементарный цилиндр в $\mathcal{X}_U$). Остается учесть, что суперпозиция измеримых отображений дает измеримое (относительно соответствующих σ-алгебр) отображение. □

Заметим, что **в теореме 1.4 было несущественно, снабжено или нет измеримое пространство** $(\Omega, \mathcal{F})$ **мерой** P.

Пусть теперь $X\colon\ \Omega \to \mathcal{X}$ является $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$-измеримым с.э. и на $(\Omega, \mathcal{F})$ задана мера P. *Распределением* X называется мера на $\mathcal{B}$, обозначаемая P_X или PX^{-1}, такая что

$$PX^{-1}(B) := P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}. \tag{1.5}$$

В качестве простого упражнения проверьте, что формула (1.5) задает меру на $\mathcal{B}$.

Из теоремы 1.4 вытекает, что **с.ф.** $X(t)$**,** $t \in T$**, индуцирует распределение** $P_{\mathbf{X}}$ **на** $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$. Распределение с. э. $\mathbf{X}$ обозначают также $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ ("law" – закон). Последнее обозначение особенно удобно, когда $\mathbf{X}$ есть случайная функция,

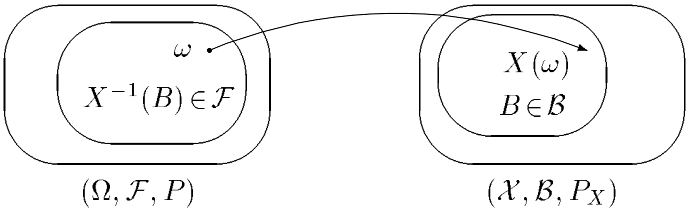

Рис. 1.3

т. е. $\mathbf{X} = \{X_t,\ t\in T\}$. Например, запись $\mathcal{L}(X_t,\ t\in T) = \mathcal{L}(Y_t,\ t\in T)$ означает, что $P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}}$ на σ-алгебре $\mathcal{B}_T$ (здесь $\mathbf{Y} = \{Y_t,\ t\in T\}$).

Таким образом, всегда можно говорить о $P(\omega\colon\ X(\cdot,\omega)\in B)$, **где** $B\in\mathcal{B}_T$. **Поэтому нашей следующей задачей будет подробнее ознакомиться со структурой** σ-**алгебры** $\mathcal{B}_T$.

Обозначим
$$\mathcal{C}_T = \bigcup_{J\in F(T)} \pi^{-1}_{T,J}\mathcal{B}_J.$$

Теорема 1.5. *Пусть* T *— бесконечное множество и* $N(T)$ *— совокупность счетных подмножеств* T. *Тогда*
$$\mathcal{B}_T = \bigcup_{U\in N(T)} \mathcal{B}_{T,U}, \quad \text{где}\ \ \mathcal{B}_{T,U} = \pi^{-1}_{T,U}\mathcal{B}_U \tag{1.6}$$
и $\mathcal{B}_T = \sigma\{\mathcal{C}_T\}$.

$\square$ Положим $\mathcal{E}_T := \bigcup\limits_{U\in N(T)} \mathcal{B}_{T,U}$, т. е. возьмем совокупность множеств из $\mathcal{X}_T$, входящих в какую-либо из объединяемых σ-алгебр $\mathcal{B}_{T,U}$. Проверим, что $\mathcal{E}_T$ есть σ-алгебра. Очевидно, $\mathcal{X}_T = \pi^{-1}_{T,U}\mathcal{X}_U \in \mathcal{B}_{T,U}$ для любого $U\subset T$, и если $A = \pi^{-1}_{T,U}B$, $B\in\mathcal{B}_U$, то $\mathcal{X}_T\setminus A = \pi^{-1}_{T,U}(\mathcal{X}_U\setminus B)\in\mathcal{B}_{T,U}$. Рассмотрим $A_n\in\mathcal{E}_T$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $A_n\in\mathcal{B}_{T,U_n}$ для некоторого $U_n\in N(T)$. Следовательно, $A_n\in\mathcal{B}_{T,M}$, где $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n\in N(T)$, т. к. $\mathcal{B}_{T,V}\subset\mathcal{B}_{T,U}$ для любых $V\subset U\subset T$. Действительно, для $V\subset U\subset T$ имеем $\pi_{T,V} = \pi_{U,V}\pi_{T,U}$, поэтому
$$\pi^{-1}_{T,V} = \pi^{-1}_{T,U}\pi^{-1}_{U,V}, \tag{1.7}$$
и $\mathcal{B}_{T,V} = \pi^{-1}_{T,V}\mathcal{B}_V = \pi^{-1}_{T,U}(\pi^{-1}_{U,V}\mathcal{B}_V)\subset\pi^{-1}_{T,U}\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{T,U}$ в силу (1.4). Итак, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{B}_{T,M}\subset\mathcal{E}_T$. Очевидно также, что $\mathcal{B}_{T,U}\subset\mathcal{B}_{T,T} = \mathcal{B}_T$ для всех $U\subset T$ ($\pi_{T,T}$ — тождественное отображение $\mathcal{X}_T$). Поэтому $\mathcal{E}_T\subset\mathcal{B}_T$. С другой стороны, для любого $t\in T$, взяв $U\in N(T)$ так, чтобы $t\in U$, получим $\pi^{-1}_{T,t}\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{T,\{t\}}\subset\mathcal{B}_{T,U}\subset\mathcal{E}_T$. В силу (1.2) $\mathcal{B}_T\subset\mathcal{E}_T$.

Пусть $C_n = \pi^{-1}_{T,J_n}B_n$, где $B_n\in\mathcal{B}_{J_n}$, $J_n\in F(T)$, $n = 1,2$. Обозначим $J = J_1\cup J_2$. Тогда $C_n = \pi^{-1}_{T,J}(\pi^{-1}_{J,J_n}B_n)$, причем $\pi^{-1}_{J,J_n}B_n\in\mathcal{B}_J$, $n=1,2$, в силу (1.4). Следовательно, $C_n\in\pi^{-1}_{T,J}\mathcal{B}_J$, $n = 1,2$, и $C_1\cup C_2\in\pi^{-1}_{T,J}\mathcal{B}_J\subset\mathcal{C}_T$. Очевидно, $\mathcal{X}_T = \pi^{-1}_{T,J}\mathcal{X}_J\in\mathcal{C}_T$ и $\mathcal{C}_T$ замкнуто относительно взятия дополнения. Далее, $\mathcal{C}_T\subset\mathcal{B}_T$ согласно (1.4). Поэтому $\sigma\{\mathcal{C}_T\}\subset\mathcal{B}_T$. С другой стороны, $\pi^{-1}_{T,t}\mathcal{B}_t\subset\mathcal{C}_T$ для $t\in T$, откуда $\mathcal{B}_T = \sigma\{\pi^{-1}_{T,t}\mathcal{B}_t,\ t\in T\}\subset\sigma\{\mathcal{C}_T\}$. $\square$

Иначе говоря, теорема 1.5 утверждает, что **для любого** $B\in\mathcal{B}_T$ **принадлежность функции** y (y **из** $\mathcal{X}_T$) **множеству** B **определяется только ее значениями на некотором счетном множестве** $U\subset T$ (выбор U зависит лишь от B, если само T счетно, то (1.6) сводится к равенству $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}_{T,T}$). Рассмотрим $T = [0,1]$, и пусть $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$ для $t \in T$. Тогда из сказанного следует, что, например, $C[0,1] \notin \mathcal{B}_T$, т. е. пока мы не можем ставить вопрос о вероятности того, что траектории процесса представляют собой непрерывные функции. Аналогично, множество $S_\alpha = \{y \in \mathcal{X}_T\colon \sup\limits_{t\in T} y(t) \leqslant \alpha\} \notin \mathcal{B}_T$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Итак, в случае несчетного T возникают серьезные трудности в связи с тем, что многие интересные множества в пространстве траекторий не входят в цилиндрическую σ-алгебру. Некоторые способы преодоления этих трудностей будут обсуждаться позднее.

Сейчас же заметим, что **изучение распределений $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}$-измеримых случайных элементов со значениями в $\mathcal{X}$ и изучение мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ по сути одно и то же**. Мы уже видели, что любой с.э. X индуцирует меру P_X. Обратное утверждение содержит элементарная

Лемма 1.6. *Любую меру Q на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ можно рассматривать как распределение некоторого с.э. X.*

□ Возьмем $\Omega = \mathcal{X}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, $P = Q$ и $X = I$ (тождественное отображение). □

В частности, если на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$ задана мера Q, то случайная функция $X(t,\omega)$, имеющая $P_{\mathbf{X}} = Q$, определяется формулой

$$X(t,\omega) = \omega(t) \ \text{ для } \ \omega(\cdot) \in \mathcal{X}_T. \tag{1.8}$$

В таком случае (1.8) есть семейство *координатных отображений* пространства $\mathcal{X}_T$; при этом говорят, что процесс *непосредственно задан.*

Рассмотрим меры на функциональных пространствах вида (1.1) с цилиндрическими σ-алгебрами. Пусть на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$ имеется мера Q. Тогда на $(\mathcal{X}_U, \mathcal{B}_U)$, $U \subset T$, возникают меры $Q_U := Q\pi^{-1}_{T,U}$ («проекции» или *образы меры* Q), см. (1.4).

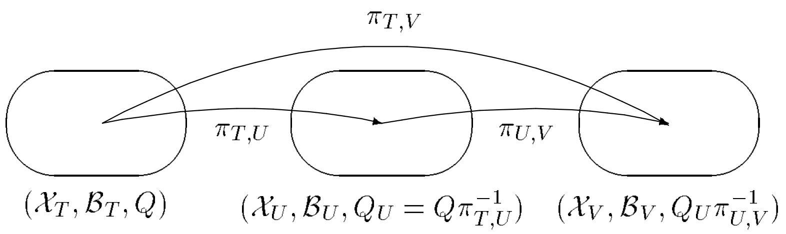

Рис. 1.4

Поэтому для $V \subset U \subset T$, учитывая (1.5), (1.7), имеем $Q\pi^{-1}_{T,V} = Q(\pi^{-1}_{T,U}\pi^{-1}_{U,V}) = (Q\pi^{-1}_{T,U})\pi^{-1}_{U,V}$. В итоге получены *условия согласованности проекций меры* Q:

$$Q_V = Q_U\pi^{-1}_{U,V} \ \text{ на } \ \mathcal{B}_V \ \text{ при всех } \ V \subset U \subset T. \tag{1.9}$$

Замечательный факт состоит в том, что **в весьма общей ситуации удается построить меру на $\mathcal{B}_T$, располагая согласованным семейством мер Q_U, индексированных конечными множествами** U (т. е. (1.9) выполнено лишь для $V, U \in F(T)$, где $F(T)$ – совокупность конечных подмножеств T).

Напомним, что полное сепарабельное метрическое пространство называется *польским.* Например, таково пространство $\mathbb{R}^k$ с евклидовой метрикой.

Теорема 1.7 (Колмогоров). *Пусть $\{\mathcal{X}_t,\ t \in T\}$ — семейство польских пространств с борелевскими σ-алгебрами $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$. Пусть на $(\mathcal{X}_J, \mathcal{B}_J)$ заданы согласованные меры Q_J, $J \in F(T)$. Тогда на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$ существует единственная мера Q, такая что $Q_J = Q\pi^{-1}_{T,J}$ для всех $J \in F(T)$.*

Эта теорема (для абстрактных пространств $\mathcal{X}_t$, $t \in T$ называемая также теоремой Колмогорова – Даниэля) будет доказана в лекции 2. Сейчас же обсудим ее условия и получим важные следствия. Подчеркнем, что T — **любое непустое множество. Однако для произвольного семейства измеримых пространств $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, теорема 1.7, вообще говоря, перестает действовать** (см. также теорему Д1.2 и замечание Д2.11).

Следствие 1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.7. *Тогда существует с.ф. $X = X(t,\omega)$, заданная на T и некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такая что меры Q_J, $J \in F(T)$, являются проекциями меры $P_{\mathbf{X}}$.*

□ По теореме 1.7 введем такую меру Q на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$, что $Q_J = Q\pi_{T,J}^{-1}$ для всех $J \in F(T)$. По лемме 1.6 строим с.э. $\mathbf{X}\colon\ \Omega \to \mathcal{X}_T$, для которого $P_{\mathbf{X}} = Q$. Иначе говоря, задаем $X(t,\omega)$ по формуле (1.8). Но тогда $Q_J = P_{\mathbf{X}}\pi_{T,J}^{-1}$ при $J \in F(T)$. □

Следствие 1.9. *Пусть $\{\mathcal{X}_t,\ t \in T\}$ — любая совокупность польских пространств. Пусть на $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}(\mathcal{X}_t))$ заданы некоторые меры Q_t, $t \in T$. Тогда существует $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и семейство независимых с.э. $X_t\colon\ \Omega \to \mathcal{X}_t$, являющихся $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$-измеримыми, для которых $P_{X_t} = Q_t$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$, $t \in T$.*

Для доказательства этого результата нам понадобится

Лемма 1.10. *Семейство мер Q_J на $(\mathcal{X}_J, \mathcal{B}_J)$, где $J \in F(T)$, согласовано тогда и только тогда, когда*

$$Q_I(B_I) = Q_J\pi_{J,I}^{-1}(B_I) \tag{1.10}$$

для любого «прямоугольника» $B_I = \{y \in \mathcal{X}_I\colon\ y(t) \in B_t,\ t \in I,\ B_t \in \mathcal{B}_t\}$, *всех $J \in F(T)$ и $I \subset J$.*

□ **Прямоугольники B_I образуют полукольцо множеств Π_I с единицей $\mathcal{X}_I$** ($\mathcal{K}$ — полукольцо, если $\varnothing \in \mathcal{K}$, если $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ влечет $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{K}$ и $A_2 \setminus A_1$ для $A_1 \subset A_2$ представимо как объединение конечного (зависящего от A_1 и A_2) числа попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{K}$). Учтем, что

$$\mathcal{B}_I = \sigma\{\Pi_I\} \tag{1.11}$$

(очевидно, $B_I = \bigcap\limits_{t\in I} \pi_{I,t}^{-1}B_t$; с другой стороны, элементарный цилиндр в $\mathcal{B}_I$ также является прямоугольником). Остается заметить, что **мера однозначно продолжается с полукольца $\mathcal{K}$ (с единицей) на порожденную им σ-алгебру $\sigma\{\mathcal{K}\}$** (см., напр., [**?**, гл. 3, §3]). □

□ Докажем следствие 1.9. Для $I \in F(T)$ и $B_I \in \mathcal{B}_I$ со сторонами B_t, $t \in I$, положим

$$Q_I(B_I) := \prod_{t\in I} Q_t(B_t). \tag{1.12}$$

Нетрудно проверить, что Q_I есть корректно определенная мера на полукольце Π_I, а значит, в силу (1.11) ее можно считать продолженной до меры на $\mathcal{B}_I$ (более общее утверждение доказано в дополнении к лекции 7, см. (7.28)). Для указанных мер, очевидно, выполнено (1.10), т. к. $\pi_{J,I}^{-1}(B_I) = \{y \in \mathcal{X}_J\colon\ y(t) \in B_t,\ t \in I$ и $y(t) \in \mathcal{X}_t,\ t \in J \setminus I\}$, а $Q_t(\mathcal{X}_t) = 1$, $t \in T$. По следствию 1.8 находим с.ф. $X(t,\omega)$ на T и $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, для которой $Q_I = P_{\mathbf{X}}\pi_{T,I}^{-1}$, $I \in F(T)$. При этом

$$Q_t = Q_{\{t\}} = P_{\mathbf{X}}\pi_{T,t}^{-1} = P_{X_t}, \quad t \in T,$$

т. к. $X(t,\omega) = \pi_{T,t}\mathbf{X}(\omega)$ и $\{\omega\colon\ X(t,\omega) \in B_t\} = \{\omega\colon\ \mathbf{X}(\cdot) \in \pi_{T,t}^{-1}B_t\}$ для $B_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$. Заметим теперь, что $X_t = X(t,\cdot)$, $t \in T$, — семейство независимых с.э., т. е. для любого $I \in F(T)$ и любого прямоугольника B_I со сторонами B_t, $t \in I$,

$$P\Big(\bigcap_{t\in I}\{\omega\colon\ X_t \in B_t\}\Big) = \prod_{t\in I} P(\omega\colon\ X_t \in B_t). \tag{1.13}$$

В левой части (1.13) стоит $P(\pi_{T,I}\mathbf{X} \in B_I) = P(\mathbf{X} \in \pi_{T,I}^{-1}(B_I)) = P_{\mathbf{X}}\pi_{T,I}^{-1}(B_I) = Q_I(B_I)$, а в правой части — $\prod\limits_{t\in I} P_{X_t}(B_t) = \prod\limits_{t\in I} Q_t(B_t)$. Таким образом, (1.13) справедливо в силу (1.12). □

Далее мы неоднократно увидим, что **многие важные процессы удается строить, отправляясь от последовательности независимых с.э.** Приведем пять примеров такого рода.

Пример 1.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов, заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$. Введем *эмпирические меры*

$$P_n(B,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_B(\xi_j(\omega)),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

где $\mathbb{1}_B(\cdot)$ — индикатор множества B, т. е.

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \tag{1.15}$$

Пользуясь определением с.ф. как семейства с.э., легко видеть, что формула (1.14) при каждом $n \in \mathbb{N}$ задает случайный процесс, индексированный борелевскими множествами B, т. е. $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Пример 1.12. Пусть $\{\zeta_j,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ – случайное поле, образованное н.о.р. векторами со значениями в $\mathbb{R}^k$. Пусть μ — σ-конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$. Определим *процесс частных сумм*

$$S_n(B,\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \zeta_j(\omega)\mu(nB \cap C_j),\ B \in \mathcal{B}([0,1]^d),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.16}$$

где $C_j = (j-1, j] = (j_1-1, j_1] \times \ldots \times (j_d-1, j_d]$ — единичный куб с верхней вершиной в точке $j \in \mathbb{Z}^d$, $nB = \{x = ny,\ y \in B\}$. Изучение процессов частных сумм при $d = 1$ позволяет глубже понять **"динамику поведения"** $\zeta_1 + \ldots + \zeta_n$ с ростом n.

Пример 1.13. Для последовательности $\{\xi_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ н.о.р. невырожденных неотрицательных величин зададим *"процесс восстановления"* формулой

$$X_t(\omega) = \max\{n : \sum_{j\leqslant n} \xi_j(\omega) \leqslant t\},\ t > 0 \tag{1.17}$$

Всюду считаем сумму по пустому множеству равной нулю, поэтому $X_t(\omega) = 0$, если $\xi_1(\omega) > t$. Вообще говоря, $X_t(\omega)$ принимает значения в $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (при этом $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ состоит из B и $B \cup \{\infty\}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Название процесса обьясняет следующая интерпретация. Пусть, начиная с $t_0 = 0$, в моменты, отделенные друг от друга промежутками ξ_j, происходят поломки некоторого устройства, и вышедший из строя блок мгновенно заменяется новым. Тогда X_t есть число замен ("восстановлений") на промежутке $(0, t]$.

Пример 1.14. Рассмотрим теперь на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ две последовательности неотрицательных случайных величин $\{\xi_j,\, j \in \mathbb{N}\}$, $\{\eta_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ таких, что $\{\xi_j, \eta_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ независимы в совокупности и $\mathcal{L}(\xi_j) = \mathcal{L}(\xi_1)$, $\mathcal{L}(\eta_j) = \mathcal{L}(\eta_1)$, $j \in \mathbb{N}$. Для положительных констант c, y_0 определим процесс

$$Y_t(\omega) = y_0 + ct - \sum_{j=1}^{X_t(\omega)} \eta_j(\omega),\ t \geqslant 0, \tag{1.18}$$

здесь $X_t(\omega)$ задается формулой (1.17). Процессы вида (1.18) используются в **модели страхования Крамера – Лундберга**. А именно, считается, что y_0 – начальный капитал компании, c – скорость поступления взносов, η_j – размер выплаты в случайный момент $\tau_j = \sum_{i=1}^{j} \xi_i$ $(j \in \mathbb{N})$. Тогда Y_t – капитал компании в момент t.

Пример 1.15. Пусть μ – конечная неотрицательная мера ($\mu \not\equiv 0$), заданная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ польского пространства $\mathcal{X}$. Пусть $Y, X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные элементы на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такие, что Y – действительная пуассоновская величина с параметром $\lambda = \mu(\mathcal{X})$, а $X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. величины, являющиеся $\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$ – измеримыми и для которых $P_{X_1}(B) = \mu(B)/\mu(\mathcal{X})$ при $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Возможность такого построения вытекает из следствия 1.9 (обратите внимание, что **мы используем величины Y и X_k со значениями в разных пространствах**). Введем на $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \Omega$ функцию $Z(B, \omega)$, положив

$$Z(B, \omega) = \sum_{j=1}^{Y(\omega)} \mathbb{1}_B(X_j(\omega)), \tag{1.19}$$

$Z(B, \omega) = 0$, когда $Y(\omega) = 0$. Формула (1.19) определяет так называемую *пуассоновскую случайную меру* с *мерой интенсивности* (или *ведущей мерой*) μ. Случай σ-конечной меры μ отнесен в дополнение к этой лекции, где обсуждаются и другие введенные процессы.

Наконец обратимся к важному вопросу, **какие случайные функции и в каком смысле отождествляются**.

Процессы $\mathbf{X} = \{X_t,\, t \in T\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_t,\, t \in T\}$ определенные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и для $t \in T$ принимающие значения в $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, называются *эквивалентными* (или *стохастически эквивалентными*), если

$$P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1 \text{ для каждого } t \in T.$$

Любой процесс $\mathbf{Y}$, эквивалентный $\mathbf{X}$, называется *модификацией* или *версией* $\mathbf{X}$ (при этом, очевидно, и $\mathbf{X}$ является модификацией $\mathbf{Y}$). **Всегда удобно считать вероятностное пространство пополненым**, т. е. включить в $\mathcal{F}$ все подмножества множеств P-меры 0 и приписать им тоже меру 0. Традиционный **пример эквивалентных процессов**: $T = \Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, P – мера Лебега на $[0,1]$, $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega)$ (см. (1.15)), $Y_t(\omega) \equiv 0$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Отметим, что все траектории $\mathbf{X}$ разрывны, а все траектории $\mathbf{Y}$ непрерывны.

Процессы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ (возможно, заданные на разных вероятностных пространствах, но при каждом $t \in T$ принимающие значения в $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$) называются *стохастически эквивалентными в широком смысле*, когда $P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}}$ на $\mathcal{B}_T$. Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ заданы на одном (полном) вероятностном пространстве, и $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$ – польские пространства, то из эквивалентности следует эквивалентность в широком смысле.

Процессы $\mathbf{X} = \{X_t, \, t \in T\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_t, \, t \in T\}$, заданные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающие значения в $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ при каждом $t \in T$, называются *неразличимыми*, если

$$P(\omega : \, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ для некоторого } t \in T) = 0,$$

т.е. с вероятностью 1 совпадают траектории этих процессов. Это влечет эквивалентность $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Действительно, для каждого $s \in T$ имеем

$$\{\omega : \, X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)\} \subset \{\omega : \, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ для некоторого } t \in T\}$$

(σ-алгебра $\mathcal{F}$ полна).

Дополнения и упражнения.

Упр. 1.1. Если $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ – **произвольная последовательность измеримых пространств** (необязательно польских) и Q_n – мера на $\mathcal{B}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ можно построить последовательность независимых с.э. $X_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_n$ таких, что $\mathcal{L}(X_n) = Q_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Это упражнение легко выполнить с помощью следующего результата.

Теорема Д1.2 (Ионеску Тулчи, см. [?, с. 266]). *Пусть на $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ задана мера Q_1 и пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_k \in \mathcal{X}_k$, $k = 1, \dots, n$ на $(\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1})$ заданы меры $Q_n(x_1, \dots, x_n; \cdot)$, такие что $Q_n(\cdot, \dots, \cdot; B) \in \mathcal{F}_n|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ при любом $B \in \mathcal{B}_{n+1}$, где $\mathcal{F}_n = \bigvee_{k=1}^n \mathcal{B}_k$ (наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$). Пусть для $B_k \in \mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, n$ ($n \geqslant 2$)*

$$P_n(B_1 \times \ldots \times B_n) = \int_{B_1} Q_1(dx_1) \int_{B_2} Q_2(x_1; dx_2) \ldots \int_{B_n} Q_n(x_1, \dots, x_{n-1}; dx_n) \quad (1.20)$$

(правая часть (1.20) *определена в силу теоремы Фубини). Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существуют с.э. X_n, такие что $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) = P_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Упр. 1.3. Приведите пример семейства σ-алгебр $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, состоящих из некоторых подмножеств Ω, таких, что $\cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ не является σ-алгеброй (сравните с теоремой 1.5).

Упр. 1.4. Пусть множество G состоит из функций $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, которые не убывают по каждому аргументу. Покажите, что $G \in \mathcal{B}_T$ ($\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$, $t \in T = \mathbb{R}^d$). Найдите $P_{\mathbf{X}}(G)$, где $\mathbf{X} = \{X_t = \xi(1 + f(t)\eta), \, t \in \mathbb{R}^d\}$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является невозрастающей (по каждой переменной) функцией, а ξ и η – независимые величины, равномерно распределенные на отрезке [-1,2].

Упр. 1.5. Докажите, что на вероятностном пространстве $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$, где P – мера Лебега, невозможно построить семейство $\{X_t, \, t \in \mathbb{R}\}$ независимых бернуллиевских величин, т. е. таких, что $P(X_t = 0) = P(X_t = 1) = 1/2$ при каждом t (сравните со следствием 1.9).

Упр. 1.6. Докажите, что ни на каком вероятностном пространстве невозможно задать семейство независимых одинаково распределенных (н.о.р.) действительных невырожденных с.в. $X(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, так, чтобы с вероятностью 1 траектории $X(\cdot, \omega)$ были непрерывны на $\mathbb{R}$.

Упр. 1.7. Пусть $C(\mathbb{R})$ – пространство действительных функций, непрерывных на $\mathbb{R}$. Зададим на "непрерывных цилиндрах", имеющих основаниями прямоугольники, т. е. на множествах вида $D_J = \{x \in C(\mathbb{R}) : x(t) \in B_t, t \in J\}$, где $B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t \in J$ и $J \in F(\mathbb{R})$, функции

$$Q_J(D_J) := \prod_{t \in J} Q_0(B_t),$$

здесь Q_0 – некоторая мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Докажите, что Q_J, $J \in F(\mathbb{R})$ согласованы на полукольце введенных выше цилиндров в $C(\mathbb{R})$ и обладают конечной аддитивностью, но **не обладают счетной аддитивностью** (сравните со следствием 1.9).

Упр. 1.8. Как выглядят траектории процессов (1.17) и (1.18)?

Упр. 1.9. Пусть $k = 1$ в определении (1.16), т. е. $\{\zeta_j\}$ – н.о.р. скалярные величины, и пусть $d = 1$. Положим

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n([0, t], \omega),\ t \in [0, 1].$$

Постройте график траектории этого процесса, если а)μ – мера Лебега на $\mathbb{R}$; б)μ – *"считающая мера"*, т.е.

$$\mu(B) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_B(j),\ B \subset \mathbb{R}.$$

О процессах, возникающих в пунктах а) и б) упр. 1.9 (соответственно с траекториями в пространстве $C[0, 1]$ и в пространстве Скорохода $D[0, 1]$) интересно прочитать главы 2,3 монографии [**?**].

Упр. 1.10. Пусть $k = 1$ в определении (1.14). Положим

$$F_n^*(x, \omega) = P_n((-\infty, x], \omega),\ x \in \mathbb{R}.$$

Постройте график траектории процесса $F_n^*(x, \omega)$, называемого *эмпирической функцией распределения.* В чем будет отличие случаев, когда ξ_j равномерно распределены на $[0, 1]$, и когда ξ_j – бернуллиевские величины, т. е. $P(\xi_j = 1) = p$, $P(\xi_j = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$?

Класс множеств $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ называется *конечно-аппроксимируемым* (к.-а.) относительно меры Q, заданной на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $S_1^{(\varepsilon)}, \dots, S_N^{(\varepsilon)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, где $N = N(\varepsilon)$, такие, что для каждого $B \in \mathcal{M}$ найдутся $S_i^{(\varepsilon)}$ и $S_j^{(\varepsilon)}$ со свойствами $S_i^{(\varepsilon)} \subset B \subset S_j^{(\varepsilon)}$ и $Q(S_j^{(\varepsilon)} \setminus S_i^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$.

Теорема Д1.11 (см. [**?**, с. 421]). *Пусть $\mathcal{M}$ – класс множеств, к.-а. относительно меры Q. Пусть $P_n(B, \omega)$ – процесс, определенный формулой* (1.14)*, и $P_{\xi_1} = Q$. Тогда*

$$\sup_{B \in \mathcal{M}} |P_n(B, \omega) - Q(B)| \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{1.21}$$

для всех $\omega \in \widetilde{\Omega}$, где $\Omega \setminus \widetilde{\Omega} \subset \Omega_0$ и $P(\Omega_0) = 0$. Иначе говоря, если вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полно, то в (1.21) *имеет место сходимость с вероятностью 1.*

Упр. 1.12. Докажите, что класс $\mathcal{M} = \{(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}^k\}$, т. е. совокупность множеств вида $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_k]$, $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, является к.-а. относительно любой (вероятностной) меры Q. Тем самым справедлив **многомерный вариант теоремы Гливенко – Кантелли** о п.н. равномерной сходимости при $n \to \infty$ эмпирических функций распределения $F_n^*(x, \omega) := P_n((-\infty, x], \omega)$ к функции распределения $F_{\xi_1}(x)$.

Упр. 1.13. Докажите, что если мера $Q = P_{\xi_1}$ является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^k$ и $\mathcal{M}$ – класс выпуклых множеств, то (1.21) также справедливо (нетривиальное утверждение, не вытекающее из упр. 1.12, относится к случаю $k \geqslant 2$).

Упр. 1.14. Покажите, что утверждение, содержащееся в упр. 1.13, может стать неверным, если отказаться от условия абсолютной непрерывности Q относительно меры Лебега (при $k \geqslant 2$).

Исследованию эмпирических мер, а также эмпирических процессов, индексированных семейством функций, посвящена обширная литература, см., напр., [?], [?].

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d)$, $d \geqslant 1$. Для функции $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ обозначим $\|F\|_{\mathcal{A}} = \sup\limits_{A \in \mathcal{A}} |F(A)|$. Положим $F_\delta(A) = |A^{(\delta)}|$, где $A \in \mathcal{A}$, $\delta > 0$ и $A^{(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, A) < \delta\}$, здесь $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, ρ – евклидова метрика и $|\cdot|$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.

Предположим, что класс множеств $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d)$ таков, что

$$\|F_\delta\|_{\mathcal{A}} \to 0, \text{ при } \delta \to 0+. \tag{1.22}$$

Упр. 1.15. Докажите, что (1.22) выполнено, если $\mathcal{A}$ – класс прямоугольников вида $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset [0,1]^d$.

Постарайтесь самостоятельно доказать следующий результат.

Теорема Д1.16 (равномерный усиленный закон больших чисел, см. [?]). *Пусть $\{X_j,\ j \in \mathbb{N}^d\}$ – случайное поле, состоящее из н.о.р. действительных величин со средним c. Пусть класс множеств $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d)$ удовлетворяет условию* (1.22). *Тогда*

$$\|n^{-d} S_n(\cdot) - |\cdot| c\|_{\mathcal{A}} \to 0 \text{ п.н. при } n \to \infty,$$

здесь $S_n(A) = \sum_{j \in nA} X_j$, $nA = \{x = ny,\ y \in A\}$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. с нормировкой n^{-d} рассматривается процесс частных сумм (1.16)*, где μ – считающая мера.*

Об исследовании процессов, индексированных множествами, см. также [?], [?].

Процессы восстановления (1.17) играют важную роль в прикладных исследованиях. Процесс восстановления называется *дискретным*, если распределение ξ_1 – решетчатое, т. е. сосредоточено на множестве вида $k\lambda$, где $k \in \mathbb{Z}$, а $\lambda > 0$ – параметр, называемый "шагом распределения" (если ξ_1 – неотрицательная величина, то $k = 0, 1, 2, \dots$). В противном случае процесс восстановления называется *непрерывным*.

Определим *функцию восстановления* $u(t)$, $t > 0$, как среднее число восстановлений на промежутке $(0, t]$, т. е. $u(t) = \mathsf{E} X_t$.

Упр. 1.17. Докажите, что $u(t) < \infty$ для всех $t > 0$.

Имеет место следующая **основная теорема теории восстановления**.

Теорема Д1.18 (Блэкуел, см., напр., [?, с. 46]). *Для непрерывного процесса восстановления*

$$u(t + s) - u(t) \to s/c$$

при $t \to \infty$ для любого фиксированного $s > 0$, где $c = \mathsf{E}\xi_1$ (считаем формально $1/\infty = 0$). Для дискретного процесса восстановления утверждение верно при s, кратных шагу λ распределения ξ_1.

О процессах восстановления см. [?], [?].

Упр. 1.19. Объясните, почему $Z(B,\cdot)$, определенное согласно (1.19), является при каждом $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ случайной величиной со значениями в пространстве $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A})$, где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра всех подмножеств $\mathbb{Z}_+$ (отсюда вытекает, что $\{Z(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}$ – действительный случайный процесс, индексированный множествами $\mathcal{B}(\mathcal{X})$).

Пусть μ – σ**-конечная мера на** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, т.е. $\mathcal{X} = \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{X}_m$, где $\mathcal{X}_m \in \mathcal{B}$ и $0 < \mu(\mathcal{X}_m) < \infty$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае **конструкцию пуассоновской случайной меры** (1.19) **легко модифицировать следующим образом**. На некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ построим счетную совокупность независимых величин

$$Y^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots,\ Y^{(m)}, X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots$$

таких, что $Y^{(m)}$ имеет распределение Пуассона с параметром

$$\lambda_m = \mu(\mathcal{X}_m),\ \mathcal{L}(X_j^{(m)}) = \mu(\cdot)/\mu(\mathcal{X}_m) \ \text{ на } \mathcal{B}_m = \mathcal{B} \cap \mathcal{X}_m,\ m, j \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$Z_m(D, \omega) = \sum_{j=1}^{Y^{(m)}(\omega)} \mathbb{I}_D(X_j^{(m)}(\omega)),\ D \in \mathcal{B}_m,\ \omega \in \Omega.$$

$$Z(B, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(B \cap \mathcal{X}_m, \omega),\ B \in \mathcal{B},\ \omega \in \Omega. \tag{1.23}$$

Отметим, что $Z(B, \omega)$ может принимать и бесконечные значения. Если вместо теоремы Колмогорова мы воспользуемся теоремой Ионеску Тулчи (см. упр. 1.1), то **здесь и в примере 1.15 можно рассматривать произвольное измеримое пространство** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Упр. 1.20. Докажите, что если $\mu(B) = \infty$ для некоторого $B \in \mathcal{B}$, то $Z(B) = \infty$ п.н., а если $\mu(B) < \infty$, то $Z(B) < \infty$ п.н.

Теорема Д1.21 (см. [?, с. 24]). *Пуассоновская случайная мера, т.е. процесс* (1.23), *обладает свойствами:*

1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ величины $Z(B_1, \cdot), \dots, Z(B_n, \cdot)$ независимы.*

2. *Для каждого $B \in \mathcal{B}$ величина $Z(B, \cdot)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\mu(B)$.*

3. *Траектории $Z(\cdot, \omega)$ являются целочисленными мерами на σ-алгебре $\mathcal{B}$.*

Уточним, что **пуассоновскую величину с параметром** $\lambda = \infty$ **мы понимаем, как величину, равную бесконечности с вероятностью единица**.

Величину $Z(B)$ можно интерпретировать, как число "случайных точек", попавших во множество $B \in \mathcal{B}$. В этой связи интерес представляет следующее упражнение.

Упр. 1.22. [см. [?, с. 370]] Пусть $B \in \mathcal{B}$ таково, что $0 < \mu(B) < \infty$, где μ – σ-конечная мера на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Пусть $B = \cup_{q=1}^{n} B_q$, где $B_q \in \mathcal{B}$, $B_j \cap B_q = \emptyset$ при $q \neq j$ $(q, j = 1, \dots, n)$. Тогда для любых $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ и $k = \sum_{q=1}^{n} k_q$ имеем

$$P(Z(B_1) = k_1, \ldots, Z(B_n) = k_n | Z(B) = k) = \\ = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{\mu(B_1)}{\mu(B)}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(B)}\right)^{k_n}. \quad (1.24)$$

Таким образом, **если** $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, **то** (1.24) показывает, что **при фиксированном числе "пуассоновских точек", попавших во множество** B (конечного и ненулевого объема) **их местоположение можно рассматривать как такое, какое имеют** k **независимых случайных величин, равномерно распределенных в** B.

Случайным точечным процессам и полям, как очень важным моделям, используемым в физике и технике, посвящена обширная литература (см., напр., [**?**, **?**] и там же библиографию).

Теперь мы рассмотрим вопросы, связанные с отождествлением случайных функций.

Упр. 1.23. Приведите пример процессов $\mathbf{X} = \{X_t, t \in T\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_t, t \in T\}$, заданных на одном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, со значениями в польском пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ при каждом $t \in T$, таких, что $P_\mathbf{X} = P_\mathbf{Y}$ на $\mathcal{B}_T$, но $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ неэквивалентны.

Упр. 1.24. Приведите пример (действительного) процесса $\mathbf{X} = \{X_t, t \in T\}$ и множеств $D, L \notin \mathcal{B}_T$ таких, что $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$ и $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in L\} \notin \mathcal{F}$.

Упр. 1.25. Приведите пример эквивалентных процессов $\mathbf{X} = \{X_t, t \in T\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_t, t \in T\}$, а также множества $D \notin \mathcal{B}_T$ таких, что $A = \{\omega : X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$ и $B = \{\omega : Y(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$, но $P(A) \neq P(B)$.

Упражнения 1.24 и 1.25 показывают, что **не всегда можно говорить о вероятности попадания процесса в множество, не входящее в цилиндрическую** σ**-алгебру, но если это и возможно, то вероятность попадания в такое множество не обязана определяться распределениями конечных наборов величин** $\{X(t_j), t_j \in T, j = 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Упр. 1.26. Приведите пример эквивалентных процессов таких, что они не являются неразличимыми.

При исследовании случайных функций **наиболее широко применяемый подход состоит в том, что (если возможно) выбирается модификация исходного процесса, которая обладает определенными "хорошими" свойствами**. Исходный процесс строится, как правило, на основе теоремы Колмогорова, которая ничего не утверждает о свойствах траекторий этого процесса.

Отметим еще несколько принципиальных моментов. Обычно **существенно, в каких пространствах при каждом** $t \in T$ **принимают значения величины** X_t, $t \in T$, **и неважно, на каком "фундаменте"** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **они определены** (хотя такой фундамент должен существовать!). Таким образом, **можно ставить вопрос о переопределении процесса** $\mathbf{X} = \{X_t, t \in T\}$ **на новое вероятностное пространство** $\widetilde{(\Omega, \mathcal{F}, P)}$. Часто приходится расширять исходное вероятностное пространство, (чтобы задать еще какие-то процессы) и рассматривать $\widetilde{(\Omega, \mathcal{F}, P)} = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P')$. В этом случае X доопределяется на $\Omega \times \Omega'$ по формуле

$$Y(\widetilde{\omega}) = X(\omega) \text{ для } \widetilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'. \quad (1.25)$$

Тогда, очевидно, $P_\mathbf{Y} = P_\mathbf{X}$ на $\mathcal{B}_T$.

Различные постановки задач о построении процессов с заданными свойствами траекторий превосходно изложены в [?] на стр. 120 – 130. В дополнении к лекции 2 мы затронем некоторые вопросы, относящиеся к этой проблематике и не вошедшие в [?].

Подчеркнем, что **идея переопределения процесса действует и в области его значений**. Пусть $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ и $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ – семейства измеримых пространств и $h_t : \mathcal{X}_t \to \mathcal{Y}_t$, $h_t \in \mathcal{B}_t|\mathcal{E}_t$ при каждом $t \in T$. Следующие пять взаимосвязанных упражнений будут использованы в дополнении к лекции 2.

Упр. 1.27. Для $V \subset T$ (V может совпадать с T) введем отображение $h_V : \mathcal{X}_V \to \mathcal{Y}_V$, положив

$$h_V(x) = y, \text{ где } x = (x_t,\, t \in V),\ y = (h_t(x_t),\, t \in V), \tag{1.26}$$

Проверьте, что $h_V \in \mathcal{B}_V|\mathcal{E}_V$ для каждого $V \subset T$ ($\mathcal{E}_V$ – цилиндрическая σ-алгебра в $\mathcal{Y}_V = \prod_{t\in V} \mathcal{Y}_t$).

Упр. 1.28. Пусть Q_J – согласованные меры на пространствах $(\mathcal{X}_J, \mathcal{B}_J)$, $J \in F(T)$. Докажите, что $\mu_J = Q_J h_J^{-1}$ – согласованные меры на $(\mathcal{Y}_J, \mathcal{E}_J)$, $J \in F(T)$, если h_J определяется согласно (1.26).

Упр. 1.29. Пусть $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ и $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ – семейства *изоморфных пространств* (пишем $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) \sim (\mathcal{Y}_t, \mathcal{E}_t)$, $t \in T$), т.е. для каждого $t \in T$ имеется отображение $h_t : \mathcal{X}_t \to \mathcal{Y}_t$, которое является взаимно однозначным, причем $h_t \in \mathcal{B}_t|\mathcal{E}_t$ и $h_t^{-1} \in \mathcal{E}_t|\mathcal{B}_t$. Предположим, что на $(\mathcal{Y}_T, \mathcal{E}_T)$ существует мера μ с проекциями $\mu_J = Q_J h_J^{-1}$, $J \in F(T)$. Тогда мера $Q = \mu h_T$ имеет проекциями меры Q_J, $J \in F(T)$ (здесь $\mu h_T = \mu(h_T^{-1})^{-1}$).

Упр. 1.30. Пусть $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{E}_t) \subset (\mathcal{Z}_t, \mathcal{A}_t)$, $t \in T$, т.е. $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{Z}_t$ и $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{A}_t$ для $t \in T$ (тогда очевидно $\mathcal{E}_V \subset \mathcal{A}_V$ для $V \subset T$). Пусть на $(\mathcal{Y}_J, \mathcal{E}_J)$ заданы согласованные меры μ_J, $J \in F(T)$. Докажите, что формула

$$P_J(A) = \mu_J(A \cap \mathcal{Y}_J),\ A \in \mathcal{A}_J \tag{1.27}$$

определяет согласованное семейство мер на $(\mathcal{Z}_J, \mathcal{A}_J)$, $J \in F(T)$. При этом, очевидно, $P_J = \mu_J$ на $\mathcal{E}_J$ для $J \in F(T)$.

Упр. 1.31. Пусть на $(\mathcal{Z}_T, \mathcal{A}_T)$ существует мера P, имеющая проекциями P_J, $J \in F(T)$, фигурирующие в (1.27). Докажите, что Ph_T (т.е. $P(h_T^{-1})^{-1}$) является мерой на $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$ с проекциями Q_J на $(\mathcal{X}_J, \mathcal{B}_J)$, $J \in F(T)$.

Заметим, что используется также **перепараметризация** исходного процесса, т.е. изучение процесса $Y_s = X_{g^{-1}(s)}$, $s \in S$, где $g : T \to S$ – взаимно однозначное отображение.

Производя перепараметризацию, не следует забывать, что, как правило, структура зависимости величин $\{X_t,\, t \in U\}$ и $\{X_t,\, t \in V\}$ для $U, V \subset T$ связана с геометрическими аспектами расположения множеств U и V. В ряде задач от исходного метрического пространства (T, ρ) совершается переход к *псевдометрическому пространству* (T, δ) (в отличие от метрики, если $\delta(x, y) = 0$, то необязательно $x = y$). Например, если $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$ и $\mathsf{E}X_t^2 < \infty$, $t \in T$, то используется "*естественная полуметрика*" (*псевдометрика*)

$$\delta(s, t) = (\mathsf{E}(X_t - X_s)^2)^{1/2}. \tag{1.28}$$

В заключение этого раздела мы упомянем глубокую и плодотворную теорию, развитую благодаря трудам Р.Л. Добрушина, О.Е. Ланфорда и Д. Рюэля, а также их последователей. **Основная идея здесь состоит в том, чтобы строить случайные поля, отправляясь от должным образом согласованных условных распределений**. Поскольку указанный вопрос является технически сложным, мы отнесли его в Приложение 1, где даются первоначальные сведения о гиббсовских случайных полях. Теории упомянутых полей посвящены монографии [?], [?].

Отметим также два новых направления в теории случайных процессов, интенсивно развивающиеся в последние годы. Первое связано с изучением *суперпроцессов*, т.е. случайных процессов со значениями в пространствах мер (см., напр., [?], [?]). Второе относится к квантовой вероятности (см. [?], [?] [?], [?]).

Лекция 2. Согласованные меры. Процессы с независимыми приращениями.

Совпадение борелевской и цилиндрической σ-алгебр в конечном произведении польских пространств. Регулярность мер в метрических пространствах. Аппроксимация меры борелевского множества мерами вложенных компактов. Цилиндрическая алгебра C_T. Доказательство теоремы Колмогорова. Конечномерные распределения случайной функции. Условия согласованности мер $Q_{t_1,\dots,t_n}$ для упорядоченных наборов точек $t_1,\dots,t_n \in T$. Характеристическая функция меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций. Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Броуновское движение (винеровский процесс).

Для доказательства теоремы Колмогорова понадобится ряд лемм.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{X}_t$, $t \in T$, — польские пространства соответственно с метриками ρ_t и борелевскими σ-алгебрами $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$. Тогда пространство $\mathcal{X}_J$, $J \in F(T)$, снабженное метрикой*

$$\rho_J(y(\cdot), z(\cdot)) = \max_{t\in J} \rho_t(y(t), z(t)), \tag{2.1}$$

является польским. При этом $\mathcal{B}_J = \mathcal{B}(\mathcal{X}_J)$, т. е. цилиндрическая σ-алгебра совпадает с борелевской.

□ Очевидно, ρ_J обладает всеми свойствами метрики. Сходимость в этой метрике функций $y_n(\cdot) \in \mathcal{X}_J$ равносильна тому, что при $n \to \infty$ сходятся $y_n(t)$ в $(\mathcal{X}_t, \rho_t)$ для каждого $t \in J$. Легко видеть, что $(\mathcal{X}_J, \rho_J)$ — полное сепарабельное пространство.

«Проектирование» $\pi_{J,t}\colon \mathcal{X}_J \to \mathcal{X}_t$, определяемое формулой $\pi_{J,t} y = y(t)$, есть непрерывное отображение $(\mathcal{X}_J, \rho_J)$ в $(\mathcal{X}_t, \rho_t)$ для каждого $t \in J$. Поэтому $\pi_{J,t}^{-1} G_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_J)$ для любого открытого множества $G_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$. По следствию 1.2 имеем $\pi_{J,t}^{-1} B_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_J)$ для любого $B_t \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_t)$. Из (1.2) видим, что $\mathcal{B}_J \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}_J)$. Подчеркнем, что для последнего включения не требовалась ни полнота, ни сепарабельность $\mathcal{X}_t$, $t \in T$.

Пусть теперь G — любое открытое множество в $(\mathcal{X}_J, \rho_J)$. В силу сепарабельности $(\mathcal{X}_J, \rho_J)$ множество G можно представить в виде счетного объединения открытых шаров (проверьте в качестве простого упражнения или см. [?, с. 104]). Но шар $B_\varepsilon(y) = \{z \in \mathcal{X}_J\colon \rho_J(z, y) < \varepsilon\}$ является «прямоугольником» в $\mathcal{X}_J$. Следовательно, любое открытое множество G представимо в виде счетного объединения прямоугольников из $\mathcal{B}_J$. Поэтому $\mathcal{B}(\mathcal{X}_J) \subset \mathcal{B}_J$. □

Замечание 2.2. Мы установили, что **в сепарабельном метрическом пространстве борелевская σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй, порожденной открытыми (а значит, и замкнутыми) шарами**. В несепарабельном пространстве упомянутые σ-алгебры могут не совпадать.

Лемма 2.3 (свойство регулярности меры). *Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ — метрическое пространство и Q — мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ существуют замкнутое множество F_ε и открытое множество G_ε, такие что $F_\varepsilon \subset B \subset G_\varepsilon$ и $Q(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.*

□ Если F замкнуто, то возьмем $F_\varepsilon = F$. Определим $G^\delta = \{z \in \mathcal{X}\colon\ \rho(z, F) < \delta\}$, где $\rho(z, F) = \inf\{\rho(z, y)\colon\ y \in F\}$. Множества G^δ открыты, $G^\delta \subset G^{\delta'}$ при $\delta < \delta'$ и

$\bigcap\limits_{\delta>0} G^\delta = F$. Следовательно, $Q(G^\delta) \downarrow Q(F)$ при $\delta \to 0$ в силу свойства непрерывности меры. Поэтому найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для $G_\varepsilon = G^{\delta(\varepsilon)}$ имеем $Q(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon < \varepsilon$. Достаточно показать, что класс $\mathcal{Y}$ борелевских множеств, удовлетворяющих утверждению леммы 2.3, образует σ-алгебру. Тогда получим, что $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$, поскольку замкнутые множества входят в $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества. Пусть $B_n \in \mathcal{Y}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем замкнутое $F_{n,\varepsilon}$ и открытое $G_{n,\varepsilon}$, такие что $F_{n,\varepsilon} \subset B_n \subset G_{n,\varepsilon}$ и $Q(G_{n,\varepsilon} \setminus F_{n,\varepsilon}) < \varepsilon 2^{-n-1}$. Возьмем $F_\varepsilon = \bigcup\limits_{n \leqslant n_0} F_{n,\varepsilon}$, где n_0 выбрано так, что $Q\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} \setminus F_\varepsilon\Big) < \varepsilon/2$ (F_ε замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств). Введем открытое множество $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{n,\varepsilon}$. Тогда $F_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset G_\varepsilon$ и $Q(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Очевидно, $\mathcal{Y}$ содержит $\mathcal{X}$ и замкнуто относительно операции дополнения. □

Лемма 2.4 (Улам). *Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ — польское пространство и Q — мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Тогда для каждого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset B$, такой что $Q(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.*

□ Для $n \in \mathbb{N}$ в силу сепарабельности $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{1/n}(y_{n,m})$, где $B_\varepsilon(y) = \{x \in \mathcal{X} \colon \rho(x,y) < \varepsilon\}$, а точки $y_{n,m}$, $m = 1, 2, \ldots,$, образуют $1/n$-сеть (т. е. для любого $y \in \mathcal{X}$ можно указать точку $y_{n,m}$, такую что $\rho(y, y_{n,m}) < 1/n$). Для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем j_n так, чтобы $Q\Big(\bigcup\limits_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})\Big) > 1 - \varepsilon 2^{-n-1}$. Положим $R_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})$. Тогда для замыкания $[R_\varepsilon]$ множества R_ε имеем

$$Q(\mathcal{X} \setminus [R_\varepsilon]) \leqslant Q(\mathcal{X} \setminus R_\varepsilon) = Q\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Bigg(\overline{\bigcup_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})}\Bigg)\Bigg) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon/2.$$

Множество $[R_\varepsilon]$ — компакт, т. к. в полном пространстве оно замкнуто и вполне ограничено (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть), например, $2/n$-сетью служат точки $y_{n,m}$, $m = 1, \ldots, j_n$. По лемме 2.3 находим замкнутое $F_\varepsilon \subset B$, такое что $Q(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Тогда $K_\varepsilon = F_\varepsilon \cap [R_\varepsilon]$ есть компакт как пересечение замкнутого множества с компактом и $Q(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. □

Заметим, что для $\mathcal{X} = \mathbb{R}^q$ вместо $[R_\varepsilon]$ в доказательстве леммы 2.4 можно взять замкнутый шар достаточно большого радиуса, но в бесконечномерном случае замкнутый шар не обязан быть компактом.

Теперь **докажем теорему 1.7** (в дополнении к этой лекции даны также другие доказательства).

□ Если бы требуемая мера Q с заданными проекциями Q_J существовала, то для любого $C = \pi_{T,J}^{-1} B_J \in \mathcal{C}_T$, где $B_J \in \mathcal{B}_J$ ($J \in F(T)$), мы должны были бы иметь (см. (1.5))

$$Q(C) = Q(\pi_{T,J}^{-1} B_J) = Q\pi_{T,J}^{-1}(B_J) = Q_J(B_J).$$

Поэтому нам **не остается ничего другого, как задать Q на алгебре $\mathcal{C}_T$, положив**

$$Q(C) := Q_J(B) \ \text{ для } \ C = \pi_{T,J}^{-1} B, \ \text{ где } \ J \in F(T), \ B \in \mathcal{B}_J. \tag{2.2}$$

Это **определение корректно**. Допустим, $C = \pi_{T,J_i}^{-1} B_i$, где $J_i \in F(T)$, $B_i \in \mathcal{B}_{J_i}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $Q_{J_1}(B_1) = Q_{J_2}(B_2)$. Возьмем $J = J_1 \cup J_2$ ($\in F(T)$). Поскольку

$C = \pi^{-1}_{T,J_i} B_i = \pi^{-1}_{T,J}(\pi^{-1}_{J,J_i} B_i)$, $i = 1, 2$, и т. к. при любом отображении h множества N **на** множество M для любых $M_1, M_2 \subset M$ имеем $h^{-1}(M_1) = h^{-1}(M_2) \Longleftrightarrow M_1 = M_2$, то $\pi^{-1}_{J,J_1} B_1 = \pi^{-1}_{J,J_2} B_2$. В силу согласованности мер, индексированных множествами из $F(T)$ (выполнено (1.9) для любых $V \subset U \subset T$, $U \in F(T)$), получаем

$$Q_{J_1}(B_1) = Q_J \pi^{-1}_{J,J_1}(B_1) = Q_J(\pi^{-1}_{J,J_1} B_1) = Q_J(\pi^{-1}_{J,J_2} B_2) = Q_J \pi^{-1}_{J,J_2}(B_2) = Q_{J_2}(B_2).$$

Очевидно, Q — неотрицательная функция на $\mathcal{C}_T$, $Q(\mathcal{X}_T) = Q_J(\mathcal{X}_J) = 1$ для любого $J \in F(T)$. **Проверим конечную аддитивность** Q **на** $\mathcal{C}_T$. Возьмем $C_i \in \mathcal{C}_T$, $i = 1, 2$, такие что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Рассуждая как выше, можно сразу считать, что $C_i = \pi^{-1}_{T,J} B_i$, где $J \in F(T)$, $B_i \in \mathcal{B}_J$, $i = 1, 2$, причем $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Тогда

$$Q(C_1 \cup C_2) = Q(\pi^{-1}_{T,J}(B_1 \cup B_2)) = Q_J(B_1 \cup B_2) = Q_J(B_1) + Q_J(B_2) = Q(C_1) + Q(C_2).$$

Если мы докажем счетную аддитивность Q на $\mathcal{C}_T$, то по теореме Каратеодори Q однозначно продолжится до меры на $\sigma\{\mathcal{C}_T\}$, т. е. до меры на $\mathcal{B}_T$, согласно теореме 1.5. При этом в силу (2.2) $Q\pi^{-1}_{T,J} = Q_J$ на $\mathcal{B}_J$ для всех $J \in F(T)$.

На алгебре счетная аддитивность Q равносильна конечной аддитивности вместе со свойством непрерывности. Итак, **докажем непрерывность** Q **на** $\mathcal{C}_T$, т. е. что $Q(C_n) \to 0$, если $C_n \downarrow \varnothing$ при $n \to \infty$ ($C_n \in \mathcal{C}_T$, $C_{n+1} \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcap\limits_n C_n = \varnothing$).

Пусть $C_n = \pi^{-1}_{T,J_n} B_n$, где $J_n \in F(T)$, $B_n \in \mathcal{B}_{J_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности (рассуждения при доказательстве корректности определения Q на $\mathcal{C}_T$) **будем сразу считать** $J_n \subset J_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Допустим, что $Q(C_n) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ для всех достаточно больших n (тогда и для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку $C_{n+1} \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}$). Убедимся, что это противоречит условию $C_n \downarrow \varnothing$.

Прежде всего покажем, что **можно иметь дело лишь с множествами** $C_n = \pi^{-1}_{T,J_n} B_n$, **где** B_n **— компакты в** $\mathcal{X}_{J_n}$, $J_n \in F(T)$ (по-прежнему $J_n \subset J_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$). В самом деле, для любого $B_n \in \mathcal{B}_{J_n}$ по лемме 2.4 находим в $\mathcal{X}_{J_n}$ компакт $K_n \subset B_n$, такой что $Q_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}$. Определим $H_n = \pi^{-1}_{T,J_n} K_n \in \mathcal{C}_T$. Тогда при каждом n имеем

$$Q(C_n \setminus H_n) = Q(\pi^{-1}_{T,J_n}(B_n \setminus K_n)) = Q_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}.$$

Возьмем $L_n = \bigcap\limits_{i=1}^n H_i = \bigcap\limits_{i=1}^n \pi^{-1}_{T,J_n}\pi^{-1}_{J_n,J_i} K_i = \pi^{-1}_{T,J_n}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^n \pi^{-1}_{J_n,J_i} K_i\Big)$. Очевидно, $L_n \downarrow \varnothing$, поскольку $L_{n+1} \subset L_n$ и $L_n \subset H_n \subset C_n$. Основание цилиндра L_n, множество $D_n = \bigcap\limits_{i=1}^n \pi^{-1}_{J_n,J_i} K_i$, есть компакт в $\mathcal{X}_{J_n}$ как пересечение замкнутых множеств с компактом $K_n \equiv \pi^{-1}_{J_n,J_n} K_n$ (при непрерывном отображении прообраз замкнутого множества замкнут). Далее, учитывая, что $C_n \subset C_i$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$Q(C_n \setminus L_n) = Q\bigg(C_n \cap \bigg(\bigcup_{i=1}^n \overline{H}_i\bigg)\bigg) = Q\bigg(\bigcup_{i=1}^n (C_n \setminus H_i)\bigg) \leqslant$$
$$\leqslant Q\bigg(\bigcup_{i=1}^n (C_i \setminus H_i)\bigg) \leqslant \sum_{i=1}^n Q(C_i \setminus H_i) < \varepsilon_0/2.$$

Следовательно, $\varepsilon_0 \leqslant Q(C_n) = Q(L_n) + Q(C_n \setminus L_n) \leqslant Q(L_n) + \varepsilon_0/2$, т. е. $Q(L_n) \geqslant \varepsilon_0/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. **Итак, всюду далее** $C_n = \pi^{-1}_{T,J_n} B_n$, **где** B_n **— компакт в** $\mathcal{X}_{J_n}$, $J_n \subset J_{n+1}$, $J_n \in F(T)$, $n \in \mathbb{N}$.

Выберем в $\mathcal{X}_T$ функции $y_n \in C_n$ ($C_n \neq \varnothing$, $B_n \neq \varnothing$ для всех n, т. к. $Q(C_n) = Q_{J_n}(B_n) > 0$, а $\mu(\varnothing) = 0$ для конечно-аддитивной меры μ). Тогда $\pi_{T,J_n} y_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для любых $n \geqslant m$ имеем $\pi^{-1}_{T,J_n} B_n = C_n \subset C_m = \pi^{-1}_{T,J_m} B_m = \pi^{-1}_{T,J_n}(\pi^{-1}_{J_n,J_m} B_m)$ и, следовательно, $B_n \subset \pi^{-1}_{J_n,J_m} B_m$, откуда $\pi_{J_n,J_m} B_n \subset B_m$. Поэтому

$$y_n|_{J_m} = \pi_{T,J_m} y_n = \pi_{J_n,J_m} \pi_{T,J_n} y_n \in B_m \quad \text{для} \quad n \geqslant m.$$

Учитывая, что B_1 — компакт в $(\mathcal{X}_{J_1}, \rho_{J_1})$, находим $\{n_j^{(1)}\} \subset \mathbb{N}$ и $x_1 \in B_1$, такие что $y_{n_j^{(1)}}|_{J_1} \to x_1$ в $(\mathcal{X}_{J_1}, \rho_{J_1})$ при $j \to \infty$, т. е. согласно (2.1) имеем $y_{n_j^{(1)}}(t) \to x_1(t)$ в $(\mathcal{X}_t, \rho_t)$ при $j \to \infty$ для $t \in J_1$. Из $\{n_j^{(1)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{n_j^{(2)}\}$, такую что $y_{n_j^{(2)}}|_{J_2} \to x_2 \in B_2$ в $(\mathcal{X}_{J_2}, \rho_{J_2})$ при $j \to \infty$. Действуя аналогично, для каждого $m \geqslant 2$ находим $\{n_j^{(m)}\} \subset \{n_j^{(m-1)}\}$ и $x_m \in B_m$, такие что $y_{n_j^{(m)}}|_{J_m} \to x_m \in B_m$ в $(\mathcal{X}_{J_m}, \rho_{J_m})$ при $j \to \infty$, т. е.

$$y_{n_j^{(m)}}(t) \to x_m(t) \;\; \text{в} \;\; (\mathcal{X}_t, \rho_t) \;\; \text{для} \;\; t \in J_m, \; m \in \mathbb{N} \;\; (j \to \infty). \tag{2.3}$$

Поскольку подпоследовательность имеет тот же предел, что и сходящаяся последовательность, заключаем, что

$$x_m(t) = x(t) \;\; \text{для всех} \;\; m \in \mathbb{N} \;\; \text{и} \;\; t \in U = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m.$$

Выберем диагональную последовательность $\{n_j\}$, т. е. $n_j = n_j^{(j)}$. Тогда

$$y_{n_j}(t) \to x(t) \;\; \text{в} \;\; (\mathcal{X}_t, \rho_t) \;\; \text{при} \;\; j \to \infty \;\; \text{для} \;\; t \in U,$$

причем

$$\pi_{U,J_m} x = x_m = (x(t), \; t \in J_m) \in B_m \quad \text{для} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Возьмем какую-либо функцию $y \in \pi^{-1}_{T,U} x$, где $x = (x(t), \; t \in U) \in \mathcal{X}_U$ ($\pi_{T,U}$ отображает $\mathcal{X}_T$ на $\mathcal{X}_U$). Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\pi_{T,J_m} y = \pi_{U,J_m} \pi_{T,U} y = \pi_{U,J_m} x \in B_m,$$

т. е. $y \in \pi^{-1}_{T,J_m} B_m = C_m$ для всех m. Следовательно, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} C_m \neq \varnothing$. Пришли к противоречию. $\square$

До сих пор нам было удобно оперировать с функциями, заданными на конечных **неупорядоченных** множествах. По сути дела, **эквивалентный подход состоит в рассмотрении векторов** (упорядоченных наборов). Пусть, как и прежде, $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$ – польские пространства. Обозначим $\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_n)$ – польское пространство, состоящее из векторов $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$, где $t_1, \ldots, t_n \in T$, $x(t_k) \in \mathcal{X}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом пространстве аналогично (2.1) вводится метрика

$$\rho_{t_1,\ldots,t_n}(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_{t_k}(x(t_k), y(t_k)).$$

Как и при доказательстве леммы 2.1 убеждаемся, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(t_1, \ldots, t_n) := \mathcal{B}(\mathcal{X}(t_1, \ldots, t_n))$ совпадает с цилиндрической $\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_n}$, порожденной "упорядоченными прямоугольниками" вида $B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}$, где $B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Поэтому, если $\mathbf{X} = \{X_t,\ t \in T\}$ – с.ф., т.е. $X_t : \Omega \to \mathcal{X}_t$ есть $\mathcal{F}|\mathcal{B}_t$-измеримое отображение для $t \in T$, то согласно следствию 1.2 для любых $t_1, \dots, t_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, вектор $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(t_1, \dots, t_n)$. Меры на $\mathcal{B}(t_1, \dots, t_n)$, задаваемые формулой

$$P_{t_1,\dots,t_n}(C) = P(\omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in C), \tag{2.4}$$

называются *конечномерными распределениями* (к-м.р.) с.ф. $\mathbf{X}$. Из (2.4) вытекает, что для любого $n \geqslant 2$, всех $t_1, \dots, t_n \in T$ и $C = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$, где $B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}$, $k = 1, \dots, n$, при любой перестановке $(i_1, \dots, i_n)$ набора $(1, \dots, n)$

1°. $P_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}})$, а также

2°. $P_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}} \times \mathcal{X}_{t_n}) = P_{t_1,\dots,t_{n-1}}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}})$.

Заметим что **условия** 1° **и** 2° **равносильны условиям** 1° **и** 3°, где 3° означает, что взятие $B_{t_m} = \mathcal{X}_{t_m}$ для любого $m = 1, \dots, n$ в $P_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n})$ приводит к одновременному выкидыванию в записи этой функции t_m и B_{t_m}, т.е.

$$3°.\quad P_{t_1,\dots,t_m,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times \mathcal{X}_{t_m} \times \dots \times B_{t_{n-1}}) = \\ = P_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{m-1}} \times B_{t_{m+1}} \times \dots \times B_{t_n}).$$

Замечание 2.5. Имеет смысл рассматривать не совпадающие между собой точки $t_1, \dots, t_n$, т.к. иначе осуществляется редукция к более «короткому» вектору, состоящему из различных точек (например, $P_{t,t}(B' \times B'') = P(X_t \in B',\ X_t \in B'') = P(X_t \in B' \cap B'') = P_t(B' \cap B'')$).

Следствие 2.6. *Пусть на пространствах* $(\mathcal{X}(t_1, \dots, t_n), \mathcal{B}(t_1, \dots, t_n))$, *порожденных польскими пространствами* $(\mathcal{X}_{t_k}, \mathcal{B}_{t_k})$, $t_k \in T$, $k = 1, \dots, n$ $(n \in \mathbb{N})$ *заданы меры* $Q_{t_1,\dots,t_n}$, *удовлетворяющие условиям* 1° *и* 2° (*с заменой буквы* P *на* Q). *Тогда существует* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и с.ф.* X, *определенная на* $T \times \Omega$, *для которой меры* $Q_{t_1,\dots,t_n}$ *являются к.-м.р.*

□ Для $J \subset T$ и «прямоугольника» $B_J = \{y \in \mathcal{X}_J\colon\ y(t) \in B_t,\ t \in J\} \in \mathcal{B}_J$ положим

$$Q_J(B_J) := Q_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}), \tag{2.5}$$

где $t_1, \dots, t_n$ — как-то перенумерованные точки множества J. Определение (2.5) корректно. Действительно, в силу 1° величина $Q_J(B_J)$ будет одной и той же при любой нумерации точек множества J (важно лишь не забывать, какой точке $t \in J$ отвечает какое множество B_t). Если $B = B_{J_1}$ и $B = B_{J_2}$, то, обозначив $I = J_1 \cap J_2$, получим $B_{J_i} = \{y \in \mathcal{X}_{J_i}\colon\ y(t) \in B_t$ для $t \in I$ и $y(t) \in \mathcal{X}_t$ для $t \in J_i \setminus I\}$, $i = 1, 2$. Применяя (возможно, несколько раз) условие 3° и учитывая 1°, получаем, что $Q_{J_1}(B_{J_1}) = Q_{J_2}(B_{J_2}) = Q_I(B_I)$, где $B_I = \{y \in \mathcal{X}_I\colon\ y(t) \in B_t,\ t \in I\}$. Поскольку $Q_{t_1,\dots,t_n}$ — мера на $(\mathcal{X}(t_1, \dots, t_n), \mathcal{B}(t_1, \dots, t_n))$, из (2.5) вытекает, что Q_J есть мера на полукольце «прямоугольников» в $\mathcal{X}_J$, а значит, она однозначно продолжается до меры на $\mathcal{B}_J$. При этом в силу 1° и 3° выполнено (1.10). Поэтому по следствию 1.8 существует с.ф. X, для которой $Q_J = P_X \pi_{T,J}^{-1}$. Из (2.5) и аналога (1.11) для упорядоченных наборов вытекает, что эта случайная функция имеет заданные к.-м.р. □

Дадим еще одну форму условий согласованности мер $Q_{t_1,\dots,t_n}$. Для $n \geqslant 2$ и перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ определим отображения $\psi_n\colon T^n \to T^n$ и $\Psi_n\colon \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}^n$, положив

$$\psi_n(t_1, \dots, t_n) = (t_{i_1}, \dots, t_{i_n}), \quad \Psi_n(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}). \tag{2.6}$$

Введем отображения $\theta_n\colon T^n \to T^{n-1}$ и $\Theta_n\colon \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}^{n-1}$:

$$\theta_n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}), \quad \Theta_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{2.7}$$

Большие и малые буквы для одинаковых по сути отображений подчеркивают их действие на разных множествах. Индекс n у отображений (2.6) и (2.7) будем опускать для упрощения записи.

Лемма 2.7. *Для каждого $n \geqslant 2$ и всех $\tau = (t_1, \dots, t_n) \subset T$, где $t_1, \dots, t_n$ различны, условия согласованности 1° и 2° (или 1° и 3°) мер $Q_\tau = Q_{t_1,\dots,t_n}$ эквивалентны следующим:*

A) $Q_{\psi\tau} = Q_\tau \Psi^{-1}$;

B) $Q_{\theta\tau} = Q_\tau \Theta^{-1}$.

□ Следует рассмотреть полукольцо *упорядоченных прямоугольников* $B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$ в $\mathcal{X}(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n \in T$ ($n \in \mathbb{N}$), и воспользоваться аналогом леммы 1.6 для упорядоченных прямоугольников. □

Замечание 2.8. Для $T \subset \mathbb{R}$ достаточно рассматривать меры Q_τ, индексированные векторами $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеющими $t_1 < \ldots < t_n$. Для различных точек $s_1, \dots, s_n$ и прямоугольников $B_1 \times \ldots \times B_n$ положим

$$Q_{s_1,\dots,s_n}(B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n}) := Q_{s_{i_1},\dots,s_{i_n}}(B_{s_{i_1}} \times \ldots \times B_{s_{i_n}}),$$

где $s_{i_1} < \ldots < s_{i_n}$. Тогда условие 1° автоматически выполнено для мер $Q_{s_1,\dots,s_n}$ и потребуется лишь проверить условие 3° для мер $Q_{t_1,\dots,t_n}$ с возрастающими $t_1, \dots, t_n$.

При построении случайных процессов, принимающих действительные значения, удобно воспользоваться взаимно однозначным соответствием между мерами на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) и характеристическими функциями. Напомним, что *характеристической функцией (х.ф.) меры Q* на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ называется функция

$$\varphi_{_Q}(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(\lambda, x)\} Q(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{2.8}$$

здесь $(\lambda, x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, $i^2 = -1$.

Мера Q полностью определяется заданием *функции распределения* $F(x) := Q((-\infty, x])$, где $(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]$. В каждой точке x, в которой F непрерывна, ее значение определяется по х.ф. следующей формулой:

$$F(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\sigma \to 0+} \int\limits_{(-\infty,x]} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\lambda \exp\{-i(\lambda, y) - \sigma^2 |\lambda|^2/2\} \varphi_{_Q}(\lambda), \tag{2.9}$$

здесь $|\lambda|^2 = (\lambda, \lambda)$, $d\lambda$ — мера Лебега. Зная F в точках непрерывности, однозначно восстанавливаем F всюду, а значит, Q на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что если $\varphi_{_Q} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), d\lambda)$, то в (2.9) можно положить $\sigma = 0$ и не брать предела по σ.

Напомним еще **формулу замены переменных в интеграле Лебега**. Пусть $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ является $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{A}$-измеримым отображением, $h\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^n$ $h \in \mathcal{A} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{X}} h(g(x)) Q(dx) = \int\limits_{\mathcal{Y}} h(y) Q g^{-1}(dy), \tag{2.10}$$

причем оба интеграла в (2.10) существуют или не существуют одновременно и если существуют, то равны.

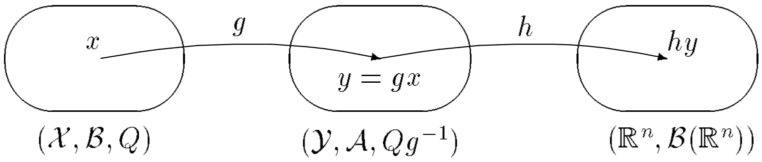

Рис. 3.1

Х.ф. случайного вектора $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\mathcal{F} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримого) называется функция

$$\varphi_{_Y}(\lambda) = \mathsf{E} \exp\{i(\lambda, Y)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Из формул (2.8) и (2.10) видим, что

$$\varphi_{_Y}(\lambda) = \int\limits_{\Omega} \exp\{i(\lambda, Y(\omega))\} P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(\lambda, z)\} PY^{-1}(dz) = \varphi_{_{P_Y}}(\lambda). \tag{2.12}$$

Теорема 2.9. *Для согласованности мер Q_τ, $\tau = (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, заданных на пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))_{n \geqslant 1}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in T^n$ и $n \geqslant 2$ выполнялись условия*

(a) $\varphi_{_{\psi\tau}}(\Psi\lambda) = \varphi_{_\tau}(\lambda)$,

(b) $\varphi_{_{\theta\tau}}(\Theta\lambda) = \varphi_{_\tau}(\Theta\lambda, 0)$,

где отображения $\psi, \Psi, \theta, \Theta$ определены в (2.6) и (2.7) (с $\mathcal{X}^n = \mathbb{R}^n$), $\varphi_{_\nu} = \varphi_{_{Q_\nu}}$, $\nu \in T^n$, $(\Theta\lambda, 0) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0)$ для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Иначе говоря, **х.ф. $\varphi_{_\tau}(\lambda)$ не должна меняться при одновременной перестановке координат векторов τ и λ, а также х.ф., индексированная «укороченным» вектором τ, получается из х.ф. $\varphi_{_\tau}$ подстановкой в ее аргументы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нулей на места «выкидываемых» в векторе τ координат**.

□ В силу взаимно однозначного соответствия между мерами на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и характеристическими функциями условия (A) и (B) леммы 2.7 равносильны тому, что при $n \geqslant 2$

$$\varphi_{_{\psi\tau}}(\lambda) = \varphi_{_{Q_\tau \Psi^{-1}}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{2.13}$$

$$\varphi_{_{\theta\tau}}(\mu) = \varphi_{_{Q_\tau \Theta^{-1}}}(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.14}$$

По лемме 1.6 найдем случайный вектор Y_τ со значениями в $\mathbb{R}^n$, такой что $Q_\tau = P_{Y_\tau}$. Тогда $Q_\tau \Psi^{-1}$ есть распределение вектора ΨY_τ, поскольку $P_{Y_\tau}\Psi^{-1}(B) = P(Y_\tau \in \Psi^{-1}(B)) = P(\Psi Y_\tau \in B)$. Далее,

$$\varphi_{_{\Psi Y_\tau}}(\lambda) = \mathsf{E} \exp\{i(\Psi Y_\tau, \lambda)\} = \mathsf{E} \exp\{i(Y_\tau, \Psi^* \lambda)\} = \varphi_{_{Y_\tau}}(\Psi^{-1}\lambda), \tag{2.15}$$

здесь мы отождествили Ψ с ортогональной матрицей, задающей это отображение (тогда $\Psi^* = \Psi^{-1}$, Ψ^* – транспонированная матрица Ψ). Согласно (2.15) условие (2.13) принимает вид $\varphi_{_{\psi\tau}}(\lambda) = \varphi_{_\tau}(\Psi^{-1}\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, что эквивалентно условию (a).

Аналогично,

$$\varphi_{_{\Theta Y_\tau}}(\mu) = \mathsf{E} \exp\{i(\Theta Y_\tau, \mu)\} = \mathsf{E} \exp\{i(Y_\tau, (\mu, 0))\} = \varphi_{_{Y_\tau}}((\mu, 0)), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.16}$$

Таким образом, (2.14) эквивалентно условию (b). □

Замечание 2.10. Пусть $X(t) = (X_1(t), \dots, X_k(t))$, $t \in T$ – случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^k$, т.е. $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ при каждом $t \in T$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и любых $t_1, \dots, t_n \in T$ рассмотрим вектор

$$\xi_{t_1,\dots,t_n} = (X_1(t_1), \dots, X_k(t_1), \dots, X_1(t_n), \dots, X_k(t_n)),$$

имеющий на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn})$ распределение $Q_{t_1,\dots,t_n}$ с х.ф. $\phi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$, $j = 1, \dots, n$. Совершенно ясно, что теорема 2.9 сохранится и для векторного случая (для мер Q_τ, заданных на пространствах $(\mathbb{R}^{kn}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn}))_{n\geqslant 1}$. Теперь в условии (a) одновременно переставляются точки $t_1, \dots, t_n$ и векторы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, в условии (b) приравнивается нулю вектор λ_n. Отправляясь от рассмотрения случайных векторов

$$\eta_{t_1,\dots,t_n} = (X_1(t_1), \dots, X_1(t_n), \dots, X_k(t_1), \dots, X_k(t_n)),$$

также легко сообразить, как модифицировать условия (a) и (b).

Введем обширный класс процессов с независимыми приращениями. Говорят, что **действительный случайный процесс** (с.п.) $X = \{X_t,\ t \in [0,\infty)\}$ **имеет независимые приращения, если для любого** $n \in \mathbb{N}$ **и всех** $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ **величины** $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ **независимы в совокупности**.

Теорема 2.11. *Пусть $\{\varphi(s,t;\cdot)\}$ — семейство характеристических функций, отвечающих мерам $Q_{(s,t]}$, $0 \leqslant s < t < \infty$, на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для существования на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ случайного процесса $X = \{X_t,\ t \in [0,\infty)\}$ с независимыми приращениями, такого что х.ф. $X_t - X_s$ есть $\varphi(s,t;\cdot)$ для любых $0 \leqslant s < t < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(s,t;\nu) = \varphi(s,u;\nu)\varphi(u,t;\nu) \tag{2.17}$$

для всех $0 \leqslant s < u < t < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$. При этом распределение X_0 может быть выбрано каким угодно.

□ Необходимость условия (2.17) очевидна, поскольку х.ф. суммы независимых случайных величин равна произведению х.ф. слагаемых.

Пусть выполнено (2.17). Допустим, что удалось построить искомый процесс X_t, причем $P_{X_0} = Q$. Тогда для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ х.ф. вектора $\xi = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ есть

$$\varphi_{\xi}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{Q}(\lambda_0)\varphi(t_0, t_1; \lambda_1) \dots \varphi(t_{n-1}, t_n; \lambda_n).$$

Теперь заметим, что

$$\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ X_{t_2} - X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Для любого случайного вектора $\eta \in \mathbb{R}^q$, любой матрицы $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^q$, где $a_{k,m} \in \mathbb{R}$ $(k, m = 1, \dots, q)$, и всех $\lambda \in \mathbb{R}^q$

$$\varphi_{A\xi}(\lambda) = \mathsf{E}\exp\{i(\lambda, A\xi)\} = \mathsf{E}\exp\{i(A^*\lambda, \xi)\} = \varphi_{\xi}(A^*\lambda). \tag{2.19}$$

Поэтому если бы упомянутый выше процесс существовал, то его к.-м.р. при $n \geqslant 1$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ задавались бы с помощью х.ф.

$$\varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{\xi}(A^*\lambda) = \varphi_Q(\mu_0)\varphi(0, t_1; \mu_1)\ldots\varphi(t_{n-1}, t_n; \mu_n),$$

где $\mu = A^*\lambda$, а A — треугольная матрица, фигурирующая в (2.18), т. е. $\mu_0 = \lambda_0 + \ldots + \lambda_n$, $\mu_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, $\ldots$, $\mu_n = \lambda_n$. Кроме того, положим

$$\varphi_{t_0}(\lambda_0) = \varphi_Q(\lambda_0)$$

и

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_Q\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Bigg)\varphi\Bigg(0, t_1; \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Bigg)\ldots\varphi(t_{n-1}, t_n; \lambda_n). \tag{2.20}$$

Остается применить теорему 2.9. Условие (a) не требует проверки в силу замечания 2.8, а условие (b), точнее, условие (b'), означающее подстановку 0 в $\varphi_\tau(\lambda)$ вместо любого аргумента λ_m, выполнено, т.к. согласно (2.17) имеем для $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\varphi(t_{m-1}, t_m; 0 + \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n)\varphi(t_m, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n) = \\ = \varphi(t_{m-1}, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n),$$

а для $m = 0$ в силу (2.20)

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n). \ \square$$

Замечание 2.12. Теорема 2.11 сохраняет силу и для процессов со значениями в $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$), т.е. для мер $Q_{(s,t]}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Для этого в матрицу, фигурирующую в (2.18), вместо единиц следует вписать I_m – единичные матрицы m-го порядка, и рассматривать $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Замечание 2.13. Процесс с независимыми приращениями может быть определен не только на полупрямой $[0, \infty)$. Если $T = \mathbb{N}$ и процесс X_t имеет независимые приращения, то $X_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t$, $t \in \mathbb{N}$, где $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых величин. Поэтому **изучение процессов с независимыми приращениями является естественным обобщением теории суммирования независимых слагаемых**.

Следствие 2.14. *Существует процесс $\{N_t,\ t \geqslant 0\}$, называемый* ***пуассоновским****, такой что*

1) $N(0) = 0$ *п.н.;*

2) *процесс имеет независимые приращения;*

3) *величина $N_t - N_s$, $0 \leqslant s < t < \infty$, распределена по закону Пуассона с параметром $m((s,t])$, где $m(\cdot)$ — некоторая σ-конечная мера на $\mathcal{B}([0,\infty))$. В частности, если $m((s,t]) = (t-s)\lambda$, $0 \leqslant s < t < \infty$, $\lambda > 0$, то говорят о стандартном пуассоновском процессе с постоянной интенсивностью λ.*

$\square$ Согласно 3) мы должны были бы иметь

$$\varphi(s, t; \nu) = \varphi_{N_t - N_s}(\nu) = e^{m((s,t])(e^{i\nu}-1)}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Условие (2.17) выполнено, поскольку $m((s,t]) = m((s,u]) + m((u,t])$, а в качестве начального распределения Q берем меру, сосредоточенную в точке 0. $\square$

Следствие 2.15. *Существует процесс* $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$, *называемый* ***винеровским*** *(или* ***броуновским движением****), такой что*

1) $W(0) = 0$ *п.н.;*
2) $W(\cdot)$ — *процесс с независимыми приращениями;*
3) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *при всех* $t > s \geqslant 0$.

Обычно в определение винеровского процесса включают еще требование п.н. непрерывности траекторий. Далее мы покажем, что это всегда можно обеспечить наряду со свойствами 1), 2), 3). □ Существование процесса, обладающего свойствами 1), 2), 3), вытекает из теоремы 2.11, поскольку $e^{-\frac{(t-s)\nu^2}{2}} = e^{-\frac{(u-s)\nu^2}{2}} e^{-\frac{(t-u)\nu^2}{2}}$, $0 \leqslant s < u < t$, $\nu \in \mathbb{R}$, т. е. справедливо (2.17). □

Для винеровского процесса $W(t) = W(t) - W(0) \sim \mathcal{N}(0,t)$, поэтому $\mathsf{E}W(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$. При $0 \leqslant s \leqslant t$ получаем (ковариация есть билинейная функция, ковариация независимых величин равна нулю)

$$\operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \operatorname{cov}(W(s) - W(0), W(t) - W(s) + W(s) - W(0)) = \\ = \mathsf{D}(W(s) - W(0)) = s.$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}W(t) = 0 \text{ и } \operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s,t\} \text{ для } s,t \in [0,\infty). \tag{2.21}$$

Дополнения и упражнения.

Покажем, как **идея переопределения области значений процесса**, изложенная в дополнении к лекции 1, **позволяет с помощью глубоких результатов функционального анализа дать другое, простое по замыслу** (см. [?]) **доказательство теоремы Колмогорова**. Это доказательство разобьем на несколько шагов.

□ **Шаг 1. Осуществим переход к рассмотрению согласованного семейства мер, заданных на компактных польских пространствах.**

Пусть $(\mathcal{X}_t, \rho_t)_{t\in T}$ – исходные польские пространства. Будем считать, что значения ρ_t принадлежат $[0,1)$ при каждом $t \in T$ (иначе использовали бы метрику $\widetilde{\rho}_t(x,y) = \rho_t(x,y)/(1+\rho_t(x,y))$, $x, y \in \mathcal{X}_t$, эквивалентную ρ_t; при этом классы борелевских множеств пространств $(\mathcal{X}_t, \rho_t)$ и $(\mathcal{X}_t, \widetilde{\rho}_t)$ совпадают и $(\mathcal{X}_t, \widetilde{\rho}_t)$ – также польское пространство). Возьмем в $\mathcal{X}_t$ счетное всюду плотное множество $M_t = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots)$ и определим отображение $h_t : \mathcal{X}_t \to [0,1]^\infty$, положив

$$h_t(x) = (\rho_t(x, x_1^{(t)}), \rho_t(x, x_2^{(t)}), \dots).$$

Введем на $[0,1]^\infty$ метрику

$$d(y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |y_k - z_k|, \tag{2.22}$$

где $y = (y_1, y_2, \dots)$, $z = (z_1, z_2, \dots)$.

Упр. 2.1. Проверьте, что h_t есть гомеоморфное отображение $\mathcal{X}_t$ на $h_t(\mathcal{X}_t) \subset [0,1]^\infty$, $t \in T$.

Упр. 2.2. Покажите, что $Z_t = [h_t(\mathcal{X}_t)]$ есть компакт в $([0,1]^\infty, d)$, $[\cdot]$ обозначает замыкание.

Применяя упр. 2.1, 2.2 и 1.30, вместо исходных мер Q_J на $(\mathcal{X}_J, \mathcal{B}_J)$ можем рассматривать согласованные меры P_J на $(Z_J, \mathcal{A}_J)$, $J \in F(T)$, где $\mathcal{A}_U$ – цилиндрическая σ-алгебра в $Z_U = \prod_{t\in U} Z_t$, $U \subset T$.

Шаг 2. Для построения P на $(Z_T, \mathcal{A}_T)$ с заданными проекциями P_J, $J \in F(T)$, **достаточно построить согласованные меры** P_U на $\mathcal{A}_U$, $U \in N(T)$, **т.е. меры, индексированные счетными подмножествами** $U \subset T$, такие что

$$P_U \Pi_{U,V}^{-1} = P_V \tag{2.23}$$

для любого $V \subset U$ (для $V \in F(T)$ меры уже заданы), здесь $\Pi_{U,V}$ – это "проектирование" из Z_U в Z_V. Действительно, в силу теоремы 1.5 для $B \in \mathcal{A}_T$ найдутся $U \in N(T)$ и $B_U \in \mathcal{A}_U$ такие, что $B = \Pi_{T,U}^{-1} B_U$. Поэтому положим

$$P(B) = P_U(B_U). \tag{2.24}$$

Упр. 2.3. Проверьте, что это определение корректно, т.е. если

$$B = \Pi_{T,V}^{-1} B_V,\ B_V \in \mathcal{A}_V,\ V \in N(T),$$

то $P_V(B_V) = P_U(B_U)$ при выполнении (2.23).

Упр. 2.4. Докажите, что формула (2.24) вводит меру на $\mathcal{A}_T$, имеющую заданные проекции P_J, $J \in F(T)$.

Шаг 3. Будем строить меры P_U, $U \in N(T)$, **удовлетворяющие условию согласованности** (2.23).

Пусть $U = \{t_1, t_2, \dots\}$, т.е. точки множества $U \in N(T)$ перенумерованы. Введем на Z_U метрику

$$d_U(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d(y_{t_k}, z_{t_k}), \tag{2.25}$$

где $y = (y_t,\ t \in U)$, $z = (z_t,\ t \in U)$, ряд в (2.25) сходится, т.к. $d(\cdot,\cdot) \leqslant 1$.

Упр. 2.5. Покажите, что (Z_U, d_U) – компактное польское пространство при $U \in N(T)$.

Упр. 2.6. Докажите, что борелевские множества Z_U ($U \in N(T)$) будут одни и те же при любой нумерации точек множества U и использовании метрики (2.25).

Упр. 2.7. Докажите, что в пространстве (Z_U, d_U), $U \in N(T)$, борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(Z_U)$ совпадает с цилиндрической $\mathcal{A}_U$.

Рассмотрим совокупность $C(Z_U; \mathbb{R})$ действительных функций, непрерывных на (Z_U, d_U). Пусть $\mathcal{H}_U$ – подмножество $C(Z_U; \mathbb{R})$, состоящее из функций H таких, что существует множество $J = J(H) \in F(T)$ и действительная непрерывная функция h_J на (Z_J, d_J) (для конечного J берем $d_J = P_J$ из (2.1), где $\rho_t = d$, $t \in J$) такая, что

$$H(z(\cdot)) = h_J(z_J), \text{ где } z_J = z|_J = (z(t),\ t \in J). \tag{2.26}$$

Совокупность $\mathcal{H}_U$ есть подалгебра в $C(Z_U, \mathbb{R})$, т.е. такое линейное многообразие, что $HG \in \mathcal{H}_U$, если $H, G \in \mathcal{H}_U$. Замыкание $[\mathcal{H}_U]$ подалгебры $\mathcal{H}_U$ в пространстве $C(Z_U; \mathbb{R})$, снабженном sup-нормой, разделяет точки Z_U, т.е. для любых $z, y \in Z_U$ найдется функция $H \in [\mathcal{H}_U]$ такая, что $H(z) \neq H(y)$ (проверьте в качестве простого упражнения), поэтому *по теореме Стоуна – Вейерштрасса* (см., напр., [**?**, с. 119]) $[\mathcal{H}_U] = C(Z_U; \mathbb{R})$.

Введем на $\mathcal{H}_U$ функционал

$$F_U(H) = \int_{Z_J} h_J(z_J) dP_J, \tag{2.27}$$

где $H \in \mathcal{H}_U$ задается формулой (2.26). Интеграл в (2.27) определен, поскольку функция $h_J \in \mathcal{B}(Z_J)|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{B}(Z_J) = \mathcal{A}_J$ в силу упр. 2.7, кроме того, непрерывная функция ограничена **на компакте**.

Упр. 2.8. Докажите, что определение (2.27) корректно, т.е. если $H(z(\cdot)) = h_I(z_I)$ для некоторого $I \in F(T)$ и некоторой функции $h_I \in C(Z_I;\mathbb{R})$, то $\int_{Z_I} h_J(z_I) dP_I$ совпадает с правой частью формулы (2.27).

Отображение F_U, задаваемое формулой (2.27), является линейным ограниченным функционалом на $\mathcal{H}_U$. Поэтому F_U **однозначно продолжается до линейного ограниченного функционала на** $C(Z_U;\mathbb{R})$. При этом

$$F_U(f) \geqslant 0 \text{ для } f \geqslant 0,\ f \in C(Z_U,\mathbb{R}) \text{ и } F_U(\mathbb{1}_{Z_U}) = 1$$

(для $f \in \mathcal{H}_U$ это утверждение очевидно). Следовательно, *по теореме Рисса – Маркова* (см., напр., [?, с. 124])

$$F_U(f) = \int_{Z_U} f dP_U,\ f \in C(Z_U,\mathbb{R}), \tag{2.28}$$

где P_U – вероятностная мера, заданная на **бэровской** σ-алгебре пространства Z_U. Понятие бэровской σ-алгебры (см., напр., [?, с. 122]) мы можем не обсуждать, поскольку **в компактном метрическом пространстве бэровские и борелевские множества совпадают** (см. [?, с. 123]). Напомним, что функция, непрерывная на компакте, является ограниченной.

Шаг 4. Покажем, что построенные меры P_U, $U \in N(T)$, согласованы. Пусть $V \subset U \in N(T)$. Тогда $\mathcal{H}_V \subset \mathcal{H}_U$. Если $f \in \mathcal{H}_V$, то существуют $J \in F(T)$ и $f_U \in C(Z_J;\mathbb{R})$ такие, что

$$f(z_U) = f(z_V) = f_J(z_J),\ z_U \in Z_U,\ z_V \in Z_V,\ z_J = z_U|_J = z_V|_J.$$

В силу (2.27) и (2.28) имеем

$$F_U(f) = \int_{Z_U} f(z_U) dP_U = \int_{Z_J} f_J(z_J) dP_J, \tag{2.29}$$

$$F_V(f) = \int_{Z_V} f(z_V) dP_V = \int_{Z_J} f_J(z_J) dP_J\,. \tag{2.30}$$

Пользуясь формулой замены переменных в интеграле Лебега (см. (2.10)), имеем, согласно (2.29) и (2.30),

$$\int_{Z_V} f(z_V) dP_V = \int_{Z_V} f(z_V) dP_U \Pi_{U,V}^{-1}. \tag{2.31}$$

Снова применяя теорему Стоуна – Вейерштрасса, получаем, что (2.31) верно для любой функции $f \in C(Z_V;\mathbb{R})$. Остается воспользоваться

Упр. 2.9. Пусть Q_1, Q_2 – меры на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ – некоторое метрическое пространство. Докажите, что если

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)dQ_1 = \int_{\mathcal{X}} f(x)dQ_2 \tag{2.32}$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, то $Q_1 = Q_2$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Упр. 2.10. Докажите единственность меры Q на $\mathcal{B}_T$, имеющей заданные проекции Q_J, $J \in F(T)$.

Теорема Колмогорова доказана. □

Рассмотренный выше **переход от пространств $\mathcal{X}_t$, $t \in T$, к отрезку $[0,1]$ позволяет существенно упростить в доказательстве теоремы 1.7 рассуждения на** с. 22, начиная с фразы "Выберем в $\mathcal{X}_t$ ..." А именно, $C_n \neq \emptyset$ и $B_n \neq \emptyset$, т.к. $Q(C_n) = Q_{J_n}(B_n) > 0$ при $n \in \mathbb{N}$; мы учли, что $\mu(\emptyset) = 0$ для конечно-аддитивной меры. Положим $U = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ (счетное множество) и введем $C'_n = \pi^{-1}_{U,J_n} B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $C'_n \subset C'_m$, если

$$C_n = \pi^{-1}_{T,U} C'_n \subset C_m = \pi^{-1}_{T,U} C'_m \ (n \geqslant m).$$

Кроме того,

$$\emptyset = \cap_{n=1}^{\infty} C_n = \cap_{n=1}^{\infty} \pi^{-1}_{T,U} C'_n = \pi^{-1}_{T,U} \cap_{n=1}^{\infty} C'_n,$$

поэтому $\cap_{n=1}^{\infty} C'_n = \emptyset$. Теперь заметим, что π_{U,J_n} – непрерывное отображение пространства $[0,1]^U$ (с метрикой вида (2.22)) в пространство $[0,1]^{J_n}$ (с метрикой ρ_{J_n}). Следовательно, $\{C'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность вложенных компактов в $[0,1]^U$. Но тогда $\cap_{n=1}^{\infty} C'_n \neq \emptyset$. Пришли к противоречию.

Замечание Д2.11. Измеримое пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *называется стандартным борелевским пространством*, если существует метрика ρ на $\mathcal{X}$, превращающая $\mathcal{X}$ в польское пространство и такая, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ т.е. $\mathcal{B}$ совпадает с борелевской алгеброй (по отношению к ρ). В частности, если E – борелевское подмножество польского пространства $\mathcal{X}$, а $\mathcal{E}$ – совокупность всех борелевских подмножеств E, то $(E, \mathcal{E})$ – стандартное борелевское пространство (вообще говоря, соответствующая метрика на E топологически не эквивалентна метрике, заданной на $\mathcal{X}$). Очевидно, **теорема Колмогорова справедлива для семейства стандартных борелевских пространств $\mathcal{X}_t$, $t \in T$.**

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ и $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ – измеримые пространства. Запись $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \overset{\subset}{\sim} (\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ означает, что имеется множество $D \in \mathcal{A}$ такое, что $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \sim (D, \mathcal{A}_{|D})$ (определение изоморфизма "$\sim$" содержит упражнение 1.29, $\mathcal{A}|_D = \mathcal{A} \cap D = \{AD : A \in \mathcal{A}\}$). Классическим примером стандартного борелевского пространства является $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ с цилиндрической σ-алгеброй $\mathcal{B}$.

Упр. 2.12. Проверьте, что во введенном выше пространстве $(K, \mathcal{B})$, снабженном метрикой d (см. (2.22)) $\mathcal{B} = \mathcal{B}(K)$. При этом (K, d) – компакт (и, следовательно, (K, d) – польское пространство). Кроме того, $(K^S, \mathcal{B}(K)^S) \sim (K, \mathcal{B}(K))$ для любого счетного множества $S \neq \emptyset$.

Напомним **основное свойство борелевских пространств**.

Теорема Д2.13 (см., напр., [?, с. 98]). *Пусть измеримое пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \subset (\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$, где $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ – некоторое польское пространство. Тогда*

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \sim \begin{cases} (K, \mathcal{B}(K)), \\ (\mathbb{N}, \mathcal{A}(\mathbb{N})), \\ ((1, \dots, |\mathcal{X}|), \mathcal{A}(1, \dots, |\mathcal{X}|)), \end{cases} \quad \textit{если } \mathcal{X} \begin{cases} \textit{несчетно,} \\ \textit{счетно,} \\ \textit{конечно,} \end{cases}$$

здесь $\mathcal{A}(M)$ – σ-алгебра всех подмножеств множества M, $|\cdot|$ – число элементов конечного множества. **В частности, $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ – стандартное борелевское пространство и на $\mathcal{X}$ существует метрика такая, что $\mathcal{X}$ – компактно, а** $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Исследованию вероятностных распределений в банаховых пространствах посвящены монографии [**?**].

Теперь мы вернемся к обсуждению некоторых **свойств траекторий случайных функций**. В связи с тем, что многие важные для теории и приложений множества не входят в $\mathcal{B}_T$ (см. теорему 1.5), Дубом было предложено понятие *сепарабельности процесса*, которое позволяет в определенных случаях строить версию процесса, поведение которой, по сути дела, задается значениями на счетном параметрическом множестве.

Процесс $\mathbf{X}=\{X_t,\, t\in T\}$, определенный на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и при каждом $t\in T$ (топологическое пространство) принимающий значения в польском пространстве $(\mathcal{X},\rho)$, называется *сепарабельным по отношению к множеству сепарабельности* $T_0\subset T$, если T_0 – счетное всюду плотное в T множество и существует $\mathcal{N}\in\mathcal{F}$ такое, что $P(\mathcal{N})=0$ и для всех $t\in T$, $\omega\in\Omega\setminus\mathcal{N}$

$$X(t,\omega)\in\Big[\bigcap_{G\ni t,G\in\mathcal{J}}\{X(s,\omega),\, s\in G\cap T_0\}\Big], \tag{2.33}$$

здесь $[B]$ обозначает замыкание B, а $\mathcal{J}$ – совокупность открытых множеств в $(\mathcal{X},\rho)$.

Теорема Д2.14 (см. [**?**, с. 128]). *Пусть $(\mathcal{X},\rho)$ – компактное пространство, и (T,δ) – псевдометрическое пространство. Тогда случайный процесс $\mathbf{X}=\{X_t,\, t\in T\}$, определенный на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и при каждом $t\in T$ принимающий значения в $(\mathcal{X},\rho)$ имеет сепарабельную модификацию. Если $\mathcal{X}$ – локально компактное пространство, то теорема действует при одноточечной компактификации $\mathcal{X}$.*

В качестве упражнения можно сравнить определение (2.33) с определениями, приведенными в [**?**, с. 111], где рассмотрено $T=[0,1]$, $\mathcal{X}=\overline{\mathbb{R}}$. О сепарабельных процессах см. также [**?**].

Введем еще одно важное определение. Пусть $(T,\mathcal{A})$ – измеримое пространство. Случайный процесс $\mathbf{X}=\{X_t,\, t\in T\}$, определенный на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и принимающий при каждом $t\in T$ значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, называется *измеримым*, если отображение

$$(t,\omega)\in T\times\Omega\mapsto X_t(\omega)\in\mathcal{X} \tag{2.34}$$

является $\mathcal{A}\times\mathcal{F}|\mathcal{B}$ измеримым. Как правило, $\mathcal{X}$ – метрическое пространство, и $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{X})$. **Если T – дискретное множество** (конечное или счетное) и $\mathcal{A}$ – σ-алгебра всех подмножеств T, **то процесс $\mathbf{X}$**, очевидно, **измерим**.

Теорема Д2.15 ([**?**]). *Пусть выполнены условия теоремы* Д2.14 *и процесс* $\mathbf{X}$ *является стохастически непрерывным на T, т.е. для каждого $t\in T$ и любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{s\to t}P(\rho(X_s,X_t)>\varepsilon)=0. \tag{2.35}$$

Тогда у $\mathbf{X}$ *существует сепарабельная и измеримая модификация.*

Упр. 2.16. Докажите, что если $\mathcal{X}$ – сепарабельное метрическое пространство, то под знаком вероятности в (2.35) стоит событие, т.е. множество из $\mathcal{F}$.

Упр. 2.17. Приведите пример неизмеримого процесса, т.е. процесса, не имеющего измеримой модификации.

Упр. 2.18. Докажите, что если процесс измерим, то каждая его траектория является $\mathcal{A}|\mathcal{B}$-измеримой функцией. Верно ли обратное утверждение?

Упр. 2.19. Пусть $\mathbf{X} = \{X_t,\, t \in T\}$ – измеримый процесс и $\tau : \Omega \to T$, $\tau \in \mathcal{F}|\mathcal{A}$. Докажите, что тогда $Y(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ есть $\mathcal{F}|\mathcal{B}$-измеримая величина.

Упр. 2.20. Покажите, что если отказаться от условия измеримости процесса, то утверждение предыдущего упражнения не обязано выполняться.

Упр. 2.21. Пусть выполнены условия теоремы Д2.14 и все траектории процесса являются непрерывными на (T,ρ). Верно ли, что тогда сам процесс является сепарабельным и измеримым?

Теперь **обсудим некоторые вопросы, касающиеся непрерывности траекторий случайных функций. Начнем с классического результата Колмогорова.**

Теорема Д2.22 (см. [?, с. 124]). *Пусть $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ – действительный случайный процесс такой, что для некоторых $\alpha, \varepsilon > 0$ и $C = C(\alpha,\varepsilon) > 0$*

$$\mathsf{E}|X(t) - X(s)|^\alpha \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon} \text{ при } s,t \in [a,b]. \tag{2.36}$$

Тогда у процесса $\mathbf{X}$ существует непрерывная п.н. модификация.

Упр. 2.23. Покажите, что если в условии (2.36) положить $\varepsilon = 0$, то утверждение теоремы Д2.22, вообще говоря, не обязано выполняться (рассмотрите пуассоновский процесс).

Теорема Колмогорова о непрерывной модификации получила многочисленные обобщения. Рассмотрим некоторые из них.

Напомним, что для множества $U \subset T$ (U может совпадать с T), где (T,δ) – псевдометрическое пространство, *ε-сетью* называется множество $S_\varepsilon \subset T$ такое, что для любого $t \in U$ найдется $s \in S_\varepsilon$ такое, что $\delta(s,t) \leqslant \varepsilon$. Другими словами, U покрывается замкнутыми шарами

$$B[s,\varepsilon] = \{t \in T :\, \delta(s,t) \leqslant \varepsilon\},\ s \in S_\varepsilon. \tag{2.37}$$

Если U обладает конечной ε-сетью, то назовем *минимальной ε-сетью* любую такую его ε-сеть $S_\varepsilon^{\min}(U)$, что $|S_\varepsilon^{\min}(U)|$ минимально, где $|V|$ обозначает число элементов конечного множества V. Положим $N_\delta(\varepsilon,U) = |S_\varepsilon^{\min}(U)|$, подчеркивая зависимость и от δ. Число

$$H_\delta(\varepsilon,U) = \log N_\delta(\varepsilon,U) \tag{2.38}$$

называется *ε-энтропией* множества U (обычно логарифм в (2.38) берется по основанию 2).

Следуя [?], введем два условия на пространство (T,δ). Пусть существуют $m \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ такие, что для любого $U \subset T$, имеющего диаметр $D_U := \sup\{\delta(s,t) :\ s,t \in U\} < \infty$, и любого $\varepsilon > 0$

$$N_\delta(\varepsilon,U) \leqslant \max\{a(D_U/\varepsilon)^m, 1\}. \tag{2.39}$$

Пусть существует такое $b > 0$, что для любой минимальной ε-сети $S_\varepsilon^{\min}(T)$

$$|S_\varepsilon^{\min}(T) \cap B[t,5\varepsilon]| \leqslant b \text{ при всех } t \in S_\varepsilon^{\min}(T), \tag{2.40}$$

где $B[\cdot, cdot]$ определяется согласно (2.37).

Теорема Д2.24 (см. [?, с. 134]). *Пусть* $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in T\}$ *– с.ф. со значениями в польском пространстве* $(\mathcal{X}, d)$ *при каждом* $t \in T$*, заданная на некотором* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и псевдометрическом пространстве* (T, δ)*, удовлетворяющем условиям* (2.39) *и* (2.40)*. Предположим, что для некоторых* $\gamma \in (0,1)$*,* $\alpha > m/\gamma$ *и* $\beta > 0$

$$\mathsf{E}(d(X(t), X(s))^{\alpha} \leqslant \beta(\delta(t,s))^{\alpha\gamma} \text{ для всех } s, t \in T. \tag{2.41}$$

Тогда существует модификация $\mathbf{Y} = \{Y(t),\, t \in T\}$*, имеющая непрерывные траектории, такая, что при любом* $\lambda \in (0, \gamma - m/\alpha)$

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \sup_{\delta(s,t) \leqslant \nu} d(Y(t), Y(s))/\delta^{\lambda}(t,s) = 0 \text{ п.н.}, \tag{2.42}$$

и для каждого $t_0 \in T$

$$\mathsf{E}\Big\{\sup_{t \in T} d(Y(t), Y(t_0))^{\alpha}\Big\} \leqslant a(2\beta D_T)^{\alpha\gamma}/(2^{\gamma - m/\alpha} - 1)^{\alpha}, \tag{2.43}$$

где a *фигурирует в условии* (2.39).

Замечание Д2.25. Если D – замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ или сфера в $\mathbb{R}^{m+1}$ (в $\mathbb{R}^q$ берется евклидова метрика), то условия (2.39) и (2.40) выполнены. Поэтому из теоремы Д2.24 вытекает теорема Д2.22, причем с дополнительными утверждениями о локальных свойствах траекторий модификации.

Для того, **чтобы ввести более общие моментные условия на с.ф. X, рассмотрим положительную, строго возрастающую, выпуклую функцию** ψ**, определенную на** $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ **такую, что** $\psi(0) \leqslant 1$.

Теорема Д2.26 (см. [?]). *Пусть* $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in T\}$ *– с.ф. со значениями в польском пространстве* $(\mathcal{X}, d)$ *при каждом* $t \in T$*, заданная на некотором* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и псевдометрическом пространстве* (T, δ)*, такая, что для некоторого* $M > 0$

$$\mathsf{E}\psi\left(\frac{d(X(t), X(s))}{\delta(s,t)}\right) \leqslant M \text{ при } s, t \in T, \text{ если } \delta(s,t) \neq 0 \tag{2.44}$$

и

$$d(X(t), X(s)) = 0 \text{ п.н., если } \delta(s,t) = 0. \tag{2.45}$$

Пусть также

$$\int_{+0} \Phi(N_{\delta}(T, \varepsilon))d\varepsilon < \infty, \tag{2.46}$$

где Φ *– функция, обратная* ψ*, а интеграл в* (2.46) *берется по положительной части некоторой окрестности 0. Тогда у с.ф.* $\mathbf{X}$ *существует непрерывная п.н. модификация.*

Упр. 2.27. Выведите из теоремы Д2.26, что если случайное поле $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in [0,1]^m\}$ со значениями при каждом $t \in T$ в польском пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ удовлетворяет для некоторой неубывающей положительной непрерывной функции f на $\mathbb{R}_+$ и $p \geqslant 1$ условиям

$$\mathsf{E}(d(X(t), X(s))^{p} \leqslant f^{p}(\|s - t\|), \tag{2.47}$$

$$\int^{+\infty} f(x^{-p/m})dx < +\infty, \tag{2.48}$$

т.е. интеграл берется в окрестности $+\infty$, то существует непрерывная п.н. модификация.

Замечание Д2.28 (см. [?]). **Интегральное условие** (2.48) **является оптимальным**, т.е. можно построить поле, удовлетворяющее всем условиям теоремы, кроме условия (2.48), такое, что оно не имеет непрерывной п.н. модификации.

Действительная с.ф. $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in T\}$ называется *гауссовской*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t_1, \dots, t_n \in T$ вектор $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ имеет многомерное нормальное распределение. Этот класс процессов подробно рассматривается в лекции 3.

Из теоремы Д2.26 выводится также следующий известный результат.

Теорема Д2.29 (см. [?]). *Пусть* $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in T\}$ *– действительный гауссовский процесс на произвольном множестве* T*, снабженном псевдометрикой* δ *(см.(1.28)). Пусть*

$$\int_{+0} \sqrt{\log N_\delta(T,\varepsilon)}\, d\varepsilon < +\infty, \tag{2.49}$$

Тогда существует модификация, имеющая п.н. непрерывные траектории.

При исследовании свойств траекторий случайных функций наряду с метрической энтропией **весьма плодотворным оказался подход, основанный на понятии** *мажорирующей меры*. Это понятие позволяет в определенном смысле лучше учесть структуру параметрического множества T. Дело в том, что метрическая энтропия как бы не различает "почти пустые" и "заполненные" шары данного радиуса.

Вероятностная мера μ, заданная на борелевской σ-алгебре пространства (T,δ), называется *мажорирующей*, если

$$\sup_{t\in T} \int_0^\infty |\log \mu(B[t,\varepsilon])|^{1/2} d\varepsilon < \infty, \tag{2.50}$$

где $B[\cdot,\cdot]$ определяется согласно (2.37).

Поскольку $\mu(B[t,\varepsilon]) = 1$ для $\varepsilon \geqslant D_T$, то в (2.50) интегрирование фактически ведется от 0 до D_T, а условие конечности интеграла (2.50) равносильно конечности этого интеграла в некоторой положительной окрестности 0.

Упр. 2.30. (см. [?, с. 182]) Докажите, что определение мажорирующей меры равносильно следующему. Существует $q > 1$ и последовательность $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ измельчающихся разбиений T на множества положительной μ-меры такая, что

$$\sup_{C\in\mathcal{C}_k} D_C \leqslant 2q^{-k} \tag{2.51}$$

и

$$\sup_{t\in T} \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} |\log \mu(C_k(t))|^{1/2} d\varepsilon < \infty, \tag{2.52}$$

где $C_k(t)$ – то (единственное) множество разбиения $\mathcal{C}_k$, которое содержит точку t.

Теорема Д2.31 (см. [?, с. 193]). *Пусть* $\mathbf{X} = \{X(t),\, t \in T\}$ *– действительная гауссовская с.ф. на некотором компактном пространстве* (T,δ)*. Тогда* ***необходимым и достаточным условием ее ограниченности*** *будет существование мажорирующей меры, а* ***необходимым и достаточным условием непрерывности*** *будет условие*

$$\lim_{\nu\downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^\nu |\log \mu(B[t,\varepsilon])|^{1/2} d\varepsilon = 0. \tag{2.53}$$

Разумеется, здесь речь идет о наличии модификации с соответствующими (п.н.) траекториями.

Достаточность приведенных условий была доказана Ферником, а необходимость – Талаграном.

Заметим, что имеется также определение мажорирующей меры, использующее конечность интеграла вида

$$\int_{+0} \Phi\left(\frac{1}{\mu(B[t,\varepsilon])}\right) d\varepsilon$$

для функции Φ определенного класса, см., напр., [**?**]. Свойства траекторий гауссовских случайных функций детально изучены в монографии [**?**], где имеются обширные библиографические указания. Некоторые результаты, связанные с траекториями броуновского движения, излагаются в последующих лекциях и дополнениях к ним.

Лекция 3. Гауссовские процессы.

Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно-определенные функции как ковариационные функции. Броуновское движение (винеровский процесс). Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного винеровского процесса на $[0,1]$, а затем на $[0,\infty)$. Многомерное броуновское движение.

Винеровский процесс, определенный в лекции 2, входит также в обширный класс гауссовских процессов. Напомним, что случайный вектор Y в $\mathbb{R}^n$ называется *нормальным* или *гауссовским* (обозначается $Y \sim \mathcal{N}(a,C)$), если для $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{Y}(\lambda) = \exp\left\{i(a,\lambda) - \frac{1}{2}(C\lambda,\lambda)\right\} \left(= \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k - \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} c_{km}\lambda_k\lambda_m\right\}\right), \qquad (3.1)$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, $C = (c_{km})_{k,m=1}^n$ — симметричная неотрицательно определенная матрица с действительными элементами. *Неотрицательная определенность* C (запись $C \geqslant 0$) означает, что $(C\lambda,\lambda) \geqslant 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Легко проверить, что приведенные два условия: $C \geqslant 0$ и $C = C^*$ (транспонированная матрица) равносильны одному условию:

$$\sum_{k,l=1}^{n} c_{kl} z_k \bar{z}_l \geqslant 0, \qquad (3.2)$$

для любых комплексных $z_1,\dots,z_n$ (черта над z обозначает комплексное сопряжение). Доказывается (см., напр., [?, с. 175]), что для описанных выше матриц C и любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, функция, стоящая в правой части (3.1), является х.ф. некоторого случайного вектора Y. Если $C > 0$, т. е. $(C\lambda,\lambda) > 0$ для любого $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, то Y имеет плотность (по мере Лебега)

$$P_Y(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|C|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-(C^{-1}(x-a),x-a)\},$$

где $|C|$ — определитель C.

Для $Y \sim \mathcal{N}(a,C)$ нетрудно установить **смысл параметров** a **и** C:

$$a_k = \mathsf{E}Y_k, \quad c_{km} = \operatorname{cov}(Y_k,Y_m), \quad k,m = 1,\dots,n \quad (n \geqslant 1). \qquad (3.3)$$

Действительная с.ф. $X(t)$, заданная на T и $(\Omega,\mathcal{F},P)$, называется *гауссовской*, если все ее к.-м.р. являются гауссовскими. Другими словами, если $(X(t_1),\dots,X(t_n))$ есть гауссовский вектор для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого конечного набора точек $t_1,\dots,t_n \in T$ (достаточно требовать это для наборов $(t_1,\dots,t_n)$, состоящих из различных точек, что, в частности, вытекает из следующей элементарной леммы, которая нам понадобится далее).

Лемма 3.1. *Вектор $Y = (Y_1,\dots,Y_n)$ является гауссовским в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $(\tau,Y) = \sum_{k=1}^{n}\tau_k Y_k$ есть гауссовская случайная величина для всех $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n) \in \mathbb{R}^n$.*

□ Пусть $Y \sim \mathcal{N}(a, C)$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{R}$ в силу (3.1)

$$\mathsf{E}e^{i\nu(\tau,Y)} = \mathsf{E}e^{i(\nu\tau,Y)} = \exp\left\{i(a,\nu\tau) - \frac{1}{2}(C\nu\tau,\nu\tau)\right\} = \exp\left\{i(a,\tau)\nu - \frac{1}{2}(C\tau,\tau)\nu^2\right\},$$

т. е. $(\tau, Y) \sim \mathcal{N}((a,\tau),(C\tau,\tau))$ (как обычно, $\nu\tau = (\nu\tau_1, \dots, \nu\tau_n)$).

Обратно. Пусть $(\tau, Y) \sim \mathcal{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$. Тогда (см. (3.3) при $n = 1$)

$$a_\tau = \mathsf{E}(\tau, Y) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \mathsf{E}Y_k = (\tau, \mathsf{E}Y)$$

и (3.4)

$$\sigma_\tau^2 = \mathsf{D}(\tau,Y) = \mathsf{D}\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k Y_k\right) = \sum_{k,m=1}^{n}\tau_k\tau_m \operatorname{cov}(Y_k,Y_m) = \sum_{k,m=1}^{n}\tau_k\tau_m c_{km} = (C\tau,\tau)$$

(взяв вектор τ с компонентами $\tau_j = 1$ и $\tau_k = 0$ при $k \neq j$, получим, что Y_j – гауссовская величина, поэтому $\mathsf{E}Y_j^2 < \infty$, $j = 1, \dots, n$). Следовательно, для любого $\nu \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}e^{i\nu(\tau,Y)} = \exp\left\{i\nu a_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2\nu^2\right\}. \qquad (3.5)$$

Подставив в (3.5) $\nu = 1$ и a_τ, σ_τ^2 из (3.4), получим (3.1). □

Действительная функция $r(s,t)$, заданная на $T \times T$, называется *неотрицательно определенной*, если матрицы $(r(t_k,t_m))_{k,m=1}^n \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора точек $t_1, \dots, t_n \in T$.

Теорема 3.2. *Пусть заданы произвольная действительная функция $a(t)$, $t \in T$, и симметричная неотрицательно определенная действительная функция $r(s,t)$, $s,t \in T$. Тогда на T и некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существует гауссовская с.ф. $X(t,\omega) \in \mathbb{R}$, для которой $a(t) = \mathsf{E}X(t)$ и $r(s,t) = \operatorname{cov}(X(s),X(t))$ при всех $s,t \in T$.*

□ Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ зададим на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ меры Q_τ как меры, отвечающие х.ф. вида (3.1), где $a = (a(t_1), \dots, a(t_n))$ и $c_{km} = r(t_k,t_m)$ (с векторами мы оперируем как со столбцами). Тогда очевидным образом выполнены условия (a) и (b) теоремы 2.9. □

Таким образом, действительная **гауссовская с.ф., точнее, ее распределение в $(\mathbb{R}_T, \mathcal{B}_T)$, задается** двумя объектами: **функцией среднего и ковариационной функцией**. Отметим, что для любой действительной с.ф. $X(t)$, имеющей для каждого $t \in T$ конечный второй момент, при всех $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k,m=1}^{n}\operatorname{cov}(X(t_k),X(t_m))\lambda_k\lambda_m = \operatorname{cov}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X(t_k), \sum_{m=1}^{n}\lambda_m X(t_m)\right) \geqslant 0.$$

Очевидно, $\operatorname{cov}(X(s),X(t)) = \operatorname{cov}(X(t),X(s))$. Поэтому **условия, налагаемые в теореме 3.2 на функцию r, являются не только достаточными, но и необходимыми для существования действительной гауссовской с.ф. с ковариационной функцией r**. Таким образом, **класс неотрицательно определенных действительных функций совпадает с классом ковариационных функций (действительных) гауссовских процессов**.

Комплекснозначная функция $R(s,t)$, $s,t \in T$, где T — некоторое множество, называется *неотрицательно определенной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $t_1, \dots, t_n \in T$ и всех $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l R(t_k, t_l) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

($\overline{z} = u - iv$ для $z = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}$). Пусть $\{X(t),\ t \in T\}$ — с.ф., принимающая комплексные значения при каждом t, такая что $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$ для $t \in T$. Обычно такие с.ф. называют *L_2-процессами*. *Ковариационная функция* этого процесса определяется формулой

$$r(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - \mathsf{E}X(s))\overline{(X(t) - \mathsf{E}X(t))}. \tag{3.7}$$

Случайная функция $X = \{X(t) = \xi(t) + \zeta(t),\ t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{C}$ называется гауссовской (здесь $\xi(t), \zeta(t)$ – действительные процессы), если для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t_1, \dots, t_n \in T$ вектор $(\xi(t_1), \zeta(t_1), \dots, \xi(t_n), \zeta(t_n))$ имеет нормальное распределение (равносильно требовать гауссовость $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n), \zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n))$).

Теорема 3.3. *Класс неотрицательно определенных функций $R(s,t)$, $s,t \in T$, совпадает с классом ковариационных функций L_2-процессов $\{X(t),\ t \in T\}$, и также совпадает с классом ковариационных функций комплекснозначных гауссовских процессов $\{X(t),\ t \in T\}$.*

□ Если $X(t)$, $t \in T$, — L_2-процесс, то для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $t_1, \dots, t_n \in T$ и всех $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l r(t_k, t_l) = \mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)\right|^2 \geqslant 0.$$

Обратно. Пусть $R(s,t)$, $s,t \in T$, — неотрицательно определенная функция. Положим $R_1(s,t) = \operatorname{Re} R(s,t)$ и $R_2(s,t) = \operatorname{Im} R(s,t)$, $s,t \in T$. Для $z_k = u_k + iv_k$, $k = 1, \dots, n$, неравенство (3.6) после выделения действительной и мнимой частей примет вид

$$\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k, t_m)(u_k u_m + v_k v_m) + \sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k, t_m)(u_k v_m - v_k u_m) +$$
$$+ i\left[\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k, t_m)(v_k u_m - u_k v_m) + \sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k, t_m)(u_k u_m - v_k v_m)\right] \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Из (3.6) при $n = 1$ видим, что $R(t,t) \geqslant 0$ для всех $t \in T$. При $n = 2$, любых $t_1, t_2 \in T$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, согласно (3.6) имеем

$$|z_1|^2 R(t_1, t_2) + z_1 \overline{z_2} R(t_1, t_2) + \overline{z_1} z_2 R(t_2, t_1) + |z_2|^2 R(t_2, t_2) \geqslant 0.$$

Следовательно, $z_1 \overline{z_2} R(t_1, t_2) + \overline{z_1} z_2 R(t_2, t_1)$ – действительное число. В частности, при $z_1 = z_2 = 1$ получаем, что $R(t_1, t_2) + R(t_2, t_1) \in \mathbb{R}$ для всех $t_1, t_2 \in T$. Выбрав $z_1 = 1$, $z_2 = i$, приходим к тому, что $R(t_1, t_2) - R(t_2, t_1)$ есть чисто мнимое число. Таким образом, $R(s,t) = \overline{R(t,s)}$ для любых $s,t \in T$. Это свойство *эрмитовой сопряженности* функции $R(s,t)$ влечет соотношения $R_1(s,t) = R_1(t,s)$ и $R_2(s,t) = -R_2(t,s)$ при $s,t \in T$. Поэтому неравенство (3.8) можно переписать в виде $(C\lambda, \lambda) \geqslant 0$, где

$\lambda = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$, а матрица C симметричная неотрицательно определенная с действительными элементами:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} R_1(t_k,t_m) & R_2(t_k,t_m) \\ \hline -R_2(t_k,t_m) & R_1(t_k,t_m) \end{array}\right)_{k,m=1,\ldots,n.} \tag{3.9}$$

В силу замечания 2.10 существует гауссовский процесс $(\xi(t),\zeta(t))$, $t \in T$, со значениями в $\mathbb{R}^2$ при каждом t, такой что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$ вектор $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n), \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_n)) \sim \mathcal{N}(0, C)$, где матрица ковариаций C задается формулой (3.9). Возьмем

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi(t) - i\zeta(t)), \quad t \in T. \tag{3.10}$$

Тогда для $s, t \in T$ (принимая во внимание, что $-R_2(t,s) = R_2(s,t)$, $s,t \in T$) имеем

$$\mathsf{E}X(s)\overline{X(t)} = \frac{1}{2}(R_1(s,t) - iR_2(t,s) + iR_2(s,t) + R_1(s,t)) =$$
$$= R_1(s,t) + iR_2(s,t) = R(s,t). \ \square$$

Теорема 3.4. *Определение винеровского процесса, данное в следствии* 2.15, *эквивалентно следующему:*

1°. $(W(t),\, t \geqslant 0)$ *– гуссовский процесс;*

2°. $\mathsf{E}W(t) = 0$, $t \in [0,\infty)$*;*

3°. $\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = \min\{t,s\}$, $t,s \in [0,\infty)$.

$\square$Мы уже видели, что процесс с независимыми приращениями, построенный в силу следствия 2.15, удовлетворяет (2.21), т.е. условиям 2° и 3°. Докажем, что этот процесс является гауссовским. Вектор $(W(t_1), \ldots, W(t_n))$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, гауссовский, т. к. он получается линейным преобразованием (см. (2.18)) вектора

$$(W(t_1) - W(0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})),$$

который является гауссовским, т.к. состоит из независимых гауссовских величин в силу 2) и 3). Действительно, если в $\mathbb{R}^n$ вектор $Y \sim \mathcal{N}(a, C)$, то, пользуясь (3.1) и (2.19), сразу получаем, что $AY \sim \mathcal{N}(Aa, ACA^*)$, где $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^n$ и $a_{k,m} \in \mathbb{R}$, $k, m = 1, \ldots, n$.

Обратно, пусть выполнены условия 1°, 2°, 3°. Покажем, что тогда процесс обладает свойствами 1), 2), 3), указанными в следствии 2.15. В силу следствия 2.15 и формулы 2.21 получаем, что функция $r(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \in [0,\infty)$, является неотрицательно определенной. Следовательно, по теореме 3.2 существует центрированный гауссовский процесс $(W(t),\, t \geqslant 0)$ с такой ковариационной функцией. То, что функция $r(s,t)$ неотрицательно определена, легко проверить и непосредственно:

$$r(s,t) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\min\{s,t\}]}(z)\, dz = \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,s]}(z)\mathbb{1}_{[0,t]}(z)\, dz,$$

а для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ имеем

$$\sum_{k,m=1}^n r(t_k,t_m)\lambda_k\lambda_m = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{1}_{[0,t_k]}(z)\right)^2 dz \geqslant 0.$$

Поскольку $\mathsf{E}W(0) = 0$ и $\mathsf{D}W(0) = \operatorname{cov}(W(0), W(0)) = \min\{0, 0\} = 0$, то $W(0) = 0$ п.н. Далее, для $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ получаем

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ W_{t_1} - W_0 \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \quad -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $(W(0), W(t_1) - W(0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$ — гауссовский вектор. **Компоненты гауссовского вектора независимы тогда и только тогда, когда матрица ковариаций диагональна** (вектор имеет независимые компоненты тогда и только тогда, когда его х.ф. распадается в произведение х.ф. компонент; в гауссовском случае следует воспользоваться формулой (3.1)). Теперь заметим, что в силу билинейности ковариации

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(W(t_{k+1}) - W(t_k), W(t_{m+1}) - W(t_m)) = \\ &\quad = \min\{t_{k+1}, t_{m+1}\} - \min\{t_{k+1}, t_m\} - \min\{t_k, t_{m+1}\} + \min\{t_k, t_m\} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq m. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из нормальности вектора приращений следует нормальность $W(t) - W(s)$ для любых $t, s \geqslant 0$ (**подвектор гауссовского вектора является гауссовским**, т. к. его х.ф. находится по х.ф. исходного вектора занулением части λ_j). Кроме того, $\mathsf{E}(W(t) - W(s)) = \mathsf{E}W(s) - \mathsf{E}W(t) = 0$ и $\mathsf{D}(W(t) - W(s)) = t - s$ при $t \geqslant s$ (вычисление совершенно аналогично (3.11)). $\square$

Покажем, что можно дать **явную конструкцию винеровского процесса по последовательности независимых величин** и при этом такую, что построенный процесс будет иметь с вероятностью 1 **непрерывные траектории**.

Замечание 3.5. В связи со следствиями 2.14,2.15 и теоремой 2.11 интересно отметить, что **если действительный процесс X_t, $t \geqslant 0$ начинается из 0 и имеет независимые приращения, то условие непрерывности (п.н.) его траекторий влечет гауссовость этого процесса.** Более общий результат содержится в Приложении 2.

Сначала построим процесс $W(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Введем *функции Хаара* $H_k(t)$, $t \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots$, положив

$$H_0(t) \equiv 1, \quad H_1(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2]}(t) - \mathbb{1}_{(1/2,1]}(t),$$

а для $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, обозначив $a_{n,k} = 2^{-n}(k - 2^n)$, определим

$$H_k(t) = 2^{n/2}(\mathbb{1}_{I_{n,k}}(t) - \mathbb{1}_{J_{n,k}}(t)),$$

где $I_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}]$, $J_{n,k} = (a_{n,k} + 2^{-n-1}, a_{n,k} + 2^{-n}]$ (рис. 3.2).

Система $\{H_k\}$ является **полной и ортонормированной в $L^2[0, 1]$ с мерой Лебега**. Напомним, что скалярное произведение в $L^2[0, 1]$ задается формулой

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\, dt, \quad f, g \in L^2[0, 1].$$

Ортонормированность $\{H_k\}$ очевидна, а полнота вытекает из того, что с помощью линейных комбинаций функций H_k можно записать индикаторы промежутков с двоично рациональными концами. (Так, $\mathbb{1}_{[0,1/2]} = (H_0 + H_1)/2$, $\mathbb{1}_{(1/2,1]} = (H_0 - H_1)/2$,

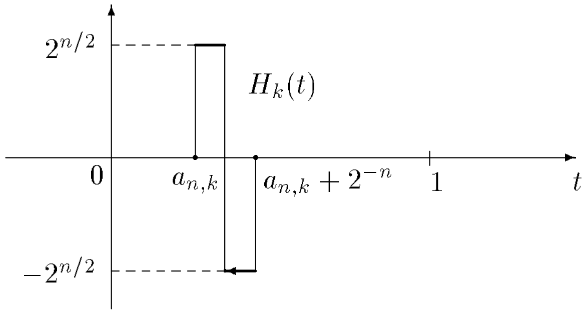

Рис. 3.2

$\mathbb{1}_{[0,1/4]} = (\mathbb{1}_{[0,1/2]} + (1/2)H_2)/2$, $\mathbb{1}_{(1/4,1/2]} = (\mathbb{1}_{(0,1/2]} - 1/2H_2)/2$, $\ldots$, $\mathbb{1}_{[a_{n,k},a_{n,k}+2^{-n-1}]} = = (\mathbb{1}_{[a_{n,k},a_{n,k}+2^{-n}]} + 2^{-n/2}H_k)/2$ для $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$.)

Следовательно, любую функцию $f \in L^2[0,1]$ можно представить в виде

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, H_k \rangle H_k, \tag{3.12}$$

где ряд в правой части (3.12) сходится в $L^2[0,1]$. Отметим также, что равенство Парсеваля дает

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, H_k \rangle \langle g, H_k \rangle. \tag{3.13}$$

Определим теперь *функции Шаудера* (см. рис. 3.3):

$$S_k(t) := \int_0^t H_k(y)\,dy \equiv \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, H_k \rangle, \quad t \in [0,1].$$

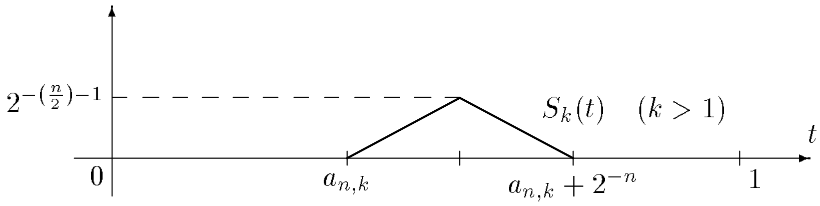

Рис. 3.3

Теорема 3.6. *Пусть* $\{\xi_k,\ k \geqslant 0\}$ — *последовательность независимых* $\mathcal{N}(0,1)$ *величин на некотором* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *(их всегда можно построить согласно следствию 1.9). Положим для* $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$

$$W(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t). \tag{3.14}$$

Тогда W *есть винеровский процесс на* $[0,1]$ *(т. е. свойства, заложенные в определение, выполнены на* $[0,1]$*), имеющий п.н. непрерывные траектории.*

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.7. *Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что $a_k = O(k^{\varepsilon})$ при $k \to \infty$ для некоторого $\varepsilon < 1/2$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t)$ сходится равномерно на $[0,1]$ и, следовательно, задает непрерывную на $[0,1]$ функцию (т. к. все $S_k(t)$ непрерывны).*

□ Достаточно показать, что

$$R_m := \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k\geqslant 2^m} |a_k| S_k(t) \to 0, \quad m \to \infty$$

($S_k(\cdot) \geqslant 0$ при всех k). Имеем $|a_k| \leqslant ck^{\varepsilon}$ для всех $k \geqslant 1$ и некоторого $c > 0$, поэтому для любого $t \in [0,1]$ и $n \geqslant 1$

$$\sum_{2^n\leqslant k<2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leqslant c2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n\leqslant k<2^{n+1}} S_k(t) \leqslant c2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} \leqslant c2^{\varepsilon - n(1/2-\varepsilon)}.$$

Мы учли, что t попадает только в один из непересекающихся носителей функций S_k, $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$, и то, что $0 \leqslant S_k(t) \leqslant 2^{-(n/2)-1}$ для рассматриваемых k. По условию $\varepsilon < 1/2$, следовательно,

$$R_m \leqslant c2^{\varepsilon} \sum_{n\geqslant m} 2^{-n(1/2-\varepsilon)} \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty. \ \square$$

Лемма 3.8. *Пусть на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы (необязательно независимые) величины $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда для любого $c > 2^{1/2}$ и п.в. $\omega \in \Omega$ можно указать $N_0(\omega, c)$, такое что*

$$|\xi_k(\omega)| < c(\log k)^{1/2} \ \ \text{при всех} \ \ k \geqslant N_0(\omega, c).$$

□ Для $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и любого $x > 0$ имеем

$$P(\xi \geqslant x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_x^{\infty} \exp\{-y^2/2\} dy = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_x^{\infty} (-1/y) d(e^{-y^2/2}) =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \left(x^{-1} e^{-x^2/2} - \int\limits_x^{\infty} y^{-2} e^{-y^2/2} dy \right) \leqslant x^{-1} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}. \quad (3.15)$$

Более того, видим, что

$$P(\xi \geqslant x) \sim x^{-1} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \ \text{ при } \ x \to \infty. \quad (3.16)$$

Следовательно, при любом $x > 0$

$$P(|\xi| \geqslant x) \leqslant x^{-1} (2/\pi)^{1/2} e^{-x^2/2}. \quad (3.17)$$

Поэтому для $c > 2^{1/2}$

$$\sum_{k\geqslant 2} P(|\xi_k| \geqslant c(\log k)^{1/2}) \leqslant c^{-1} (2/\pi)^{1/2} \sum_{k\geqslant 2} k^{-c^2/2} (\log k)^{-1/2} < \infty.$$

Остается сослаться на **лемму Бореля–Кантелли** (см. [**?**, с. ??]), утверждающую, что если $\sum\limits_k P(A_k) < \infty$, то с вероятностью 0 произойдет бесконечное число событий A_k, т. е. $P\left(\bigcap\limits_n \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k \right) = 0$. □

Вернемся к построению непрерывного винеровского процесса. Докажем теорему 3.6.

□ **Непрерывность п.н. траекторий** $W(\cdot,\omega)$ **сразу следует из лемм** 3.7 **и** 3.8. Заметим, что ряд (3.14) не только п.н. равномерно сходится на $[0,1]$, но и при каждом $t\in[0,1]$ сходится в $L^2(\Omega)=L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Действительно,

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k=n}^{n+m}\xi_k(\omega)S_k(t)\right|^2=\sum_{k=n}^{n+m}\sum_{l=n}^{n+m}S_k(t)S_l(t)\mathsf{E}\xi_k\xi_l=\sum_{k=n}^{n+m}S_k^2(t),\quad n,m\in\mathbb{N}.$$

Остается учесть полноту $L^2(\Omega)$ и то, что $\sum\limits_{2^n\leqslant k<2^{n+1}}S_k^2(t)\leqslant(2^{-(n/2)-1})^2$ для всех $t\in[0,1]$. Обозначим $Z_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_kS_k(t)$. Итак, для каждого $t\in[0,1]$ имеем $Z_n(t)\xrightarrow{L^2(\Omega)}Z(t)$ при $n\to\infty$ и $Z_n(t)\to W(t)$ п.н. при $n\to\infty$. Отсюда вытекает, что $Z(t)=W(t)$ п.н. (как сходимость п.н., так и сходимость в среднем квадратическом влекут сходимость по вероятности, а предел по вероятности последовательности случайных величин определен однозначно с точностью до эквивалентности). Таким образом, $Z_n(t)\xrightarrow{L^2(\Omega)}W(t)$, $n\to\infty$ $(t\in[0,1])$. **Найдем среднее и ковариационную функцию процесса** $W(t)$, $t\in[0,1]$. Поскольку $\mathsf{E}Z_n(t)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,1]$, имеем

$$|\mathsf{E}W(t)|=|\mathsf{E}W(t)-\mathsf{E}Z_n(t)|\leqslant(\mathsf{E}|W(t)-Z_n(t)|^2)^{1/2}\to0,\quad n\to\infty.$$

Следовательно, $\mathsf{E}W(t)=0$ при всех $t\in[0,1]$.

Для любых $s,t\in[0,1]$, принимая во внимание непрерывность скалярного произведения, получаем

$$(Z_n(s),Z_n(t))_{L^2(\Omega)}\to(W(s),W(t))_{L^2(\Omega)}=\mathsf{E}W(s)W(t)=\operatorname{cov}(W(s),W(t)),$$

но в силу независимости последовательности $\{\xi_k\}$ и поскольку $\mathsf{E}\xi^2=1$, $k\in\mathbb{N}$,

$$(Z_n(s),Z_n(t))_{L^2(\Omega)}=\mathsf{E}Z_n(s)Z_n(t)=\sum_{k=0}^{n}S_k(s)S_k(t)\mathsf{E}\xi_k^2\to\sum_{k=0}^{\infty}S_k(s)S_k(t),\quad n\to\infty,$$

а согласно (3.13)

$$\sum_{k=0}^{\infty}S_k(s)S_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle H_k,\mathbb{1}_{[0,s)}\rangle\langle H_k,\mathbb{1}_{[0,t]}\rangle=\langle\mathbb{1}_{[0,s]},\mathbb{1}_{[0,t]}\rangle=\min\{s,t\}.$$

Покажем, что W **— гауссовский процесс**. Воспользуемся леммой 3.1. Рассмотрим $Y=(\zeta,\tau)$, где $\zeta=(W(t_1),\dots,W(t_n))$, $\tau\in\mathbb{R}^n$, $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$. Тогда

$$Y=\sum_{m=1}^{n}\tau_m\sum_{k=0}^{\infty}\xi_kS_k(t_m)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\xi_k,\tag{3.18}$$

где $b_k=b_k(\tau_1,\dots,\tau_n;t_1,\dots,t_n)=\sum\limits_{m=1}^{n}\tau_mS_k(t_m)$, а ряд в (3.18) сходится как п.н., так и в $L^2(\Omega)$ как конечная сумма рядов, обладающих этими свойствами. Заметив, что $Y_N=\sum\limits_{k=0}^{N}b_k\xi_k\sim\mathcal{N}(0,\sigma_N^2)$, где $\sigma_N^2=\sum\limits_{k=1}^{N}b_k^2$, получим $\mathsf{E}Y_N^2=\sigma_N^2\to\mathsf{E}Y^2=\sigma^2$

(сходимость элементов в $L^2(\Omega)$ влечет сходимость их норм). Учитывая, что $Y_N \xrightarrow{D} Y$ при $N \to \infty$ (сходимость по распределению следует как из сходимости п.н., так и из сходимости в $L^2(\Omega)$), получаем, что

$$\varphi_{Y_N}(\lambda) = e^{\frac{-\sigma_N^2\lambda^2}{2}} \to e^{\frac{-\sigma^2\lambda^2}{2}} = \varphi_Y(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

т. е. $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. □

Возьмем

$$\widetilde{W}(t,\omega) = \begin{cases} W(t,\omega) & \text{при } \omega \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при } \omega \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $\Omega_0 \subset \Omega$ состоит из точек ω, для которых траектория $W(\cdot,\omega)$ непрерывна. Тогда $\widetilde{W}$ — процесс с непрерывными траекториями для всех $\omega \in \Omega$. При этом для каждого $t \in [0,1]$ имеем $\{\omega\colon\ W(t,\omega) \neq \widetilde{W}(t,\omega)\} \subset \Omega \setminus \Omega_0$. **Всюду мы будем считать, что** $(\Omega,\mathcal{F},P)$ **полно** (в $\mathcal{F}$ включены все подмножества множеств меры нуль и им приписана мера нуль). Тогда $\widetilde{W}$ есть модификация W (т. е. $P(\widetilde{W}(t) = W(t)) = 1$ для любого $t \in [0,1]$), непрерывная всюду на $[0,1]$.

Для построения W на $[0,\infty)$ нам понадобится частный случай следующего утверждения.

Лемма 3.9. *Пусть* $\mathbf{X} = \{X(t,\omega),\ t \in T\}$ *– случайный процесс, заданный на локально-компактном сепарабельном метрическом пространстве* T *и некотором* $(\Omega,\mathcal{F},P)$. *Пусть при каждом* $t \in T$ *величины* $X(t,\omega)$ *принимают значения в польском пространстве* $\mathcal{X}$ *с метрикой* ρ. *Если все траектории* $\mathbf{X}$ *непрерывны на* T, *то* $\mathbf{X}$ *есть с.э. со значениями в пространстве* $C(T,\mathcal{X})$ *(непрерывных на* T *функций со значениями в* $\mathcal{X}$ *при каждом* $t \in T$*) с топологией равномерной сходимости на компактах, т.е. снабженном метрикой*

$$\rho_C(x(\cdot),y(\cdot)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{t\in K_n} \frac{\rho(x(t),y(t))}{1+\rho(x(t),y(t))}, \tag{3.20}$$

здесь $T = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, *где* K_n *– компакты, и* $K_n \subset K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

□Пространство $(C(T,\mathcal{X}),\rho_C)$ является польским (проверьте в качестве простого упражнения). Поэтому в силу замечания 2.2 и следствия 1.2 достаточно показать, что при любом $y \in C(T,\mathcal{X})$ и любом $r > 0$ для замкнутого шара

$$[B_r(y)] = \{x \in C(T,\mathcal{X}) : \rho_C(x,y) \leqslant r\}$$

имеем $A = \{\omega : X(\cdot,\omega) \in [B_r(y)]\} \in \mathcal{F}$. Возьмем счетное всюду плотное в T множество M. Тогда

$$[B_r(y)] = \left\{ x \in C(T,\mathcal{X}) : \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{t\in K_n\cap M} \frac{\rho(x(t),y(t))}{1+\rho(x(t),y(t))} \leqslant r \right\}.$$

Остается учесть, что

$$\zeta_n(\omega) = \sup_{t\in K_n\cap M} \frac{\rho(X(t,\omega),y(t))}{1+\rho(X(t,\omega),y(t))} \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

а множество $\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\zeta_n(\omega) \leqslant r\} \in \mathcal{F}$ (пожалуйста, объясните последние два утверждения подробнее). □

По лемме 3.9 $\widetilde{W}$ есть с.э. со значениями в $C[0,1]$, его распределение на $\mathcal{B}(C[0,1])$ называется *мерой Винера* и обозначается $\mathbb{W}$.

Пользуясь следствием 1.9, **построим** теперь на некотором (полном) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ **последовательность независимых с.э.** $\widetilde{W}_n$, $n\in\mathbb{N}$, **таких что** $\widetilde{W}_n(\cdot,\omega)\in C[0,1]$ **для** $\omega\in\Omega$ **и** $P_{\widetilde{W}_n}=\mathbb{W}$ **на** $\mathcal{B}(C[0,1])$. **Определим процесс** $\widetilde{W}$ **на** $[0,\infty)$ **с помощью непрерывного склеивания процессов** $\widetilde{W}_n$, т.е. положим

$$\widetilde{W}(t,\omega)=\begin{cases}\widetilde{W}_1(t,\omega) & \text{для}\ \ t\in[0,1),\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\widetilde{W}_j(1,\omega)+\widetilde{W}_{k+1}(t-k,\omega) & \text{для}\ \ t\in[k,k+1),\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{3.21}$$

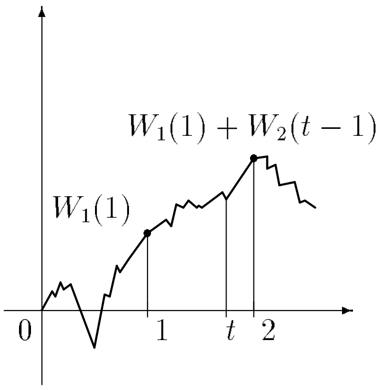

Рис. 4.1

Теорема 3.10. *Процесс* $\widetilde{W}$, *определяемый формулой* (3.21), *есть винеровский процесс на* $[0,\infty)$, *все траектории которого непрерывны.*

□ Непрерывность $\widetilde{W}$ очевидна по построению. Очевидно также, что $\widetilde{W}(0)=0$. Покажем, что $\widetilde{W}$ — процесс с независимыми приращениями, такой что $\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(s)\sim\mathcal{N}(0,t-s)$ при $0\leqslant s<t<\infty$. Если $s,t\in[k,k+1)$ для некоторого $k\geqslant 0$, то $\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(s)=\widetilde{W}_{k+1}(t-k)-\widetilde{W}_{k+1}(s-k)\sim\mathcal{N}(0,t-s)$. Если $s\in[k,k+1)$ и $t\in[m,m+1)$, где $k<m$, то $[s,t)=[s,k+1)\cup\bigcup\limits_{k<l<m}[l,l+1)\cup[m,t)$ $\big(\bigcup\limits_{l\in\varnothing}[l,l+1)=\varnothing\big)$.

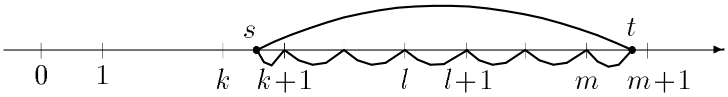

Рис. 4.2

Поэтому

$$\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(s)=\widetilde{W}(k+1)-\widetilde{W}(s)+\sum_{k<l<m}(\widetilde{W}(l+1)-\widetilde{W}(l))+\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(m).\tag{3.22}$$

Теперь заметим, что $\xi_1+\ldots+\xi_q\sim\mathcal{N}\Big(\sum\limits_{i=1}^{q}a_i,\sum\limits_{i=1}^{q}\sigma_i^2\Big)$, если величины $\xi_1,\ldots,\xi_q$ независимы и $\xi_i\sim\mathcal{N}(a_i,\sigma_i^2)$, $i=1,\ldots,q$. С.э. $\widetilde{W}_{k+1},\ldots,\widetilde{W}_{m+1}$ независимы. Если имеются конечные множества $I_l \subset [0,1]$, $k \leqslant l \leqslant m$, с числом элементов $|I_l|$ и борелевские функции $f_l\colon \mathbb{R}^{|I_l|} \to \mathbb{R}$ (т. е. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{|I_l|})\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримые отображения), то $f_{k+1}(\widetilde{W}_{k+1}(t_j),\ t_j \in I_{k+1}),\ \ldots,\ f_{m+1}(\widetilde{W}_{m+1}(t_j),\ t_j \in I_{m+1})$ — независимые величины. В частности, отсюда вытекает независимость приращений, фигурирующих в (3.22).

Аналогичные рассуждения показывают, что процесс $\widetilde{W}$ имеет независимые приращения (следует учесть, что измеримые функции от непересекающихся наборов независимых величин будут независимы). □

Далее мы считаем винеровский процесс всюду непрерывным и не пишем волну над W.

Многомерным броуновским движением называется процесс $\{W(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t)),\ t \geqslant 0\}$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, составленный из m независимых броуновских движений $\{W_k(t),\ t \geqslant 0\}$, $k = 1, \ldots, m$. Мы можем считать $W_1(t), \ldots, W_m(t)$ независимыми с.э. со значениями в польском пространстве $C[0,\infty)$ с метрикой вида (3.20), где $K_n = [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Дополнения и упражнения.

Мы видели, что достаточно построить непрерывный п.н. на $[0,1]$ винеровский процесс, чтобы суметь получить непрерывный винеровский процесс на $[0,\infty)$. Поэтому сейчас мы рассмотрим еще одну красивую **конструкцию броуновского движения на $[0,1]$, предложенную П. Леви**.

Пусть на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан массив независимых величин $\{X_{0,1},\ Y_{0,1};\ Y_{n,k},\ 1 \leqslant k \leqslant 2^n,\ n \geqslant 1\}$ таких, что $X_{0,1}$ и $Y_{0,1} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_{n,k} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n \geqslant 1$ (это возможно в силу следствия 1.9). Определим последовательно, шаг за шагом увеличивая n, величины $X_{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n \geqslant 1$, положив в зависимости от четности или нечетности k, т.е. для $k = 2m-1$ и $k = 2m$ соответственно

$$X_{n+1,2m-1} = (X_{n,m} + Y_{n,m})/2,\ \ X_{n+1,2m} = (X_{n,m} - Y_{n,m})/2.$$

Обозначим $S_{n,0} = 0$, $S_{n,k} = \sum_{j=1}^k X_{n,j}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n \geqslant 1$, и введем процессы $B_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, так, что

$$B_n(k2^{-n}, \omega) = S_{n,k}(\omega),\ 1 \leqslant k \leqslant 2^n,$$

и для $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ значение $B_n(t)$ получается линейной интерполяцией значений $B_n(k2^{-n})$ и $B_n((k+1)2^{-n})$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. В итоге мы имеем семейство процессов $B_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, все траектории которых непрерывны на $[0,1]$.

Легко видеть, что

$$B_1(t) = tX_{0,1} \text{ и } \sup_{t\in[0,1]} |B_1(t)| = |X_{0,1}|,$$

а для $n \geqslant 1$

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| = \frac{1}{2} \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |Y_{n,k}|.$$

Пользуясь (3.17), получаем,

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |Y_{n,k}| \geqslant n^2 2^{-n/2}) \leqslant 2^n P(\xi > n^2) \leqslant 2^n (2\pi)^{-1/2} e^{-n^2/2},$$

здесь $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Следовательно, по лемме Бореля – Кантелли (см. с. ??) для п.в. ω существует $N = N(\omega)$ такое, что для всех $n \geqslant N$

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| \leqslant n^2 2^{-n/2-1}.$$

Итак, ряд

$$B_1(t,\omega)+\sum_{n=2}^{\infty}(B_{n+1}(t,\omega)-B_n(t,\omega))$$

для п.в. ω сходится равномерно и, согласно теореме Вейерштрасса дает п.н. непрерывную на $[0,1]$ функцию $B(t)$.

С помощью леммы 3.1 или с помощью (3.13) легко установить, что при каждом $n\geqslant 0$ процесс $\{B_n(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ является гауссовским.

Упр. 3.1. Найдите $\mathsf{E}B_n(t)$ и $\operatorname{cov}(B_n(s),B_n(t))$ для $s,t\in[0,1]$ и $n\geqslant 0$.

Упр. 3.2. Докажите, что $B(t)$ – гауссовский процесс.

Упр. 3.3. Докажите, что $\mathsf{E}B(t)=0$ и $\operatorname{cov}(B(s),B(t))=\min(s,t)$ для $s,t\in[0,1]$.

Упражнения 3.2 и 3.3 показывают, что $B(t)$ – непрерывное п.н. броуновское движение на $[0,1]$.

Отметим, что **броуновское движение может быть получено по последовательности независимых стандартных гауссовских величин и системе неслучайных функций, отличной от системы Шаудера**. Так, Пэли и Винер (1934) доказали, что

$$\xi_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\xi_k\sqrt{2}\frac{\sin(\pi kt)}{\pi k}, \tag{3.23}$$

где $\xi_0,\xi_1,\ldots$ – н.о.р. $\mathcal{N}(0,1)$ величины, п.н. сходится на $[0,1]$ равномерно, и дает непрерывную функцию, являющуюся винеровским процессом на $[0,1]$. Интересно сопоставить это построение с результатом Харди, который доказал (задача была поставлена Риманом), что функция

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2},\ t\in\mathbb{R},$$

непрерывна, но ни в одной точке не имеет производной. В [**?**, с. 10] с помощью частного случая теорем вложения классов Бесова доказано, что функции

$$W^{(n)}(t,\omega)=\frac{t\xi_0(\omega)}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{k}\sin kt$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_m\}$ будут п.н. равномерно сходиться к броуновскому движению на отрезке $[0,\pi]$. Разложения для броуновского движения содержат также формулы (10.31) и (10.48).

Возможность построения непрерывного на $[0,1]$ броуновского движения сразу вытекает из теоремы 2.11 и теоремы Колмогорова о непрерывной модификации (см. теорему Д2.22). Действительно,

$$\mathsf{E}(W_t-W_s)^4=3(t-s)^2,\ s,t\geqslant 0.$$

Упр. 3.4. Отправляясь от определения, содержащегося в следствии 2.15, воспользовавшись тем, что плотность вектора $A\xi$

$$p_{A\xi}(x)=|\det A|^{-1}p_\xi(A^{-1}x) \tag{3.24}$$

для случайного вектора ξ со значениями в $\mathbb{R}^n$, имеющего плотность $p_\xi(x)$, и A – невырожденной матрицы n-го порядка с действительными элементами, выпишите формулы для плотностей к.-м.р. винеровского процесса.

В ряде случаев бывает удобно "выпускать" броуновское движение из произвольной точки $x \in \mathbb{R}$, а не только из 0. Очевидно, можно ввести процесс

$$W_x(t,\omega) = x + W(t,\omega). \tag{3.25}$$

Покажем, как этот процесс построить (для каждого $x \in \mathbb{R}$), отправляясь от определенного семейства согласованных мер. А именно, определим для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}$ меры $Q^x_{t_0,t_1,\ldots,t_n}$, положив для "прямоугольников"

$$Q^x_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_n) = Q^x_0(B_0) \int_{B_1} dx_1 \ldots \int_{B_n} dx_n \prod_{k=1}^{n} p_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1}), \tag{3.26}$$

здесь $x_0 = x$, $t_0 = 0$ и $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 0, \ldots, n$

$$p_t(x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2t)\},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \quad Q^x_0(B) = \mathbb{1}_B(x),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{3.27}$$

Упр. 3.5. Как следует доопределить $Q^x_{t_1,\ldots,t_n}$ для $0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$, чтобы меры Q^x_τ, где $\tau = (s_1, \ldots, s_k)$ $0 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$ служили к.-м.р. некоторого случайного процесса X_t, $t \in [0,1]$?

Обозначим R_0 множество двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$. По теореме Колмогорова существует процесс X_t, $t \in R_0$, имеющий к.-м.р. $Q^x_{t_0,t_1,\ldots,t_n}$ $(t_k \in R_0$, $k = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N})$, при этом, как мы знаем, можно взять $X(t,\omega) = \omega(t)$ для Ω, состоящего из всех действительных функций, заданных на R_0. Обозначим Q^x распределение на $(\mathbb{R}_{R_0}, \mathcal{B}_{R_0})$ построенного процесса.

Упр. 3.6. Докажите, что $Q^x(C_0) = 1$, где C_0 – совокупность равномерно непрерывных на R_0 действительных функций.

Теперь заметим, что **функция, равномерно непрерывная на** R_0 (объясните, почему это необходимое и достаточное условие), **однозначно продолжается до функции, непрерывной на** $[0,1]$. Поэтому последние два упражнения позволяют построить процесс $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеющий п.н. непрерывные траектории на $[0,1]$. Объясните, почему X имеет все к.-м.р. (а не только для точек из R_0), задаваемые формулой (3.26)?

Упр. 3.7. Докажите, что построенный выше процесс $X(t)$ есть броуновское движение (3.25) на $[0,1]$. При этом P_X на $\mathcal{B}(C[0,1])$ получается, как $Q^x g$, где g – это отображение сужения функций из $C[0,1]$ до функций на R_0. Проверьте должную измеримость этого отображения.

Упр. 3.8. Пользуясь указанной выше конструкцией винеровского процесса (по согласованным мерам на множестве двоично рациональных точек), докажите, что у построенного процесса почти все траектории являются **гельдеровскими функциями** с показателем $\gamma < 1/2$, т.е.

$$|X(t) - X(s)| \leqslant C_\gamma |t - s|^\gamma,\ s, t \in [0,1],\ C_\gamma = const > 0. \tag{3.28}$$

Упр. 3.9. Докажите, что с вероятностью 1

$$\limsup_{t \downarrow 0} W(t)/t^{1/2} = \infty. \tag{3.29}$$

Другими словами, в 0 не выполняется условие Гельдера порядка 1/2.

В то же время интересно отметить еще один факт о локальном поведении траекторий броуновского движения.

Теорема Д3.10 (Бакстер). *Рассмотрим последовательность* Π_n, $n \in \mathbb{N}$, *измельчающихся разбиений отрезка* $[0,t]$, $t \geqslant 0$ *вида* $t_m^{(n)} = tm2^{-n}$, $m = 0, \dots, 2^n$. *Тогда*

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} (W(t_{m+1}^{(n)}) - W(t_m^{(n)}))^2 \to t \text{ п.н. при } n \to \infty. \tag{3.30}$$

Упр. 3.11. Докажите, что предыдущее утверждение (3.30) не обязано выполняться если брать произвольные измельчающиеся разбиения Π_n, $n \in \mathbb{N}$.

Обратимся к некоторым **обобщениям броуновского движения**.

Фрактальное (или дробное) броуновское движение с показателем $\alpha \in (0,2]$ – это центрированный гауссовский процесс $W^{(\alpha)}(t)$, $t \geqslant 0$ с ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}(W^{(\alpha)}(s), W^{(\alpha)}(t)) = \frac{1}{2}(s^\alpha + t^\alpha - |t-s|^\alpha), \; s,t \geqslant 0. \tag{3.31}$$

При $\alpha = 1$ получаем стандартное броуновское движение.

Упр. 3.12. Докажите, что функция, фигурирующая в правой части (3.31), является ковариационной. (Этот результат может быть получен из **представления Мандельброта** для некоторого стохастического интеграла, см. дополнение к лекции ??.)

Процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$ называется *процессом со стационарными приращениями*, если для любого $n \geqslant 1$, любых $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ и любого $h > 0$

$$(X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \\ = (X(t_2+h) - X(t_1+h), \dots, X(t_n+h) - X(t_{n-1}+h)),$$

где $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ означает равенство по распределению. Из приводимых ниже двух упражнений вытекает, что дробное броуновское движение – это процесс со стационарными приращениями.

Упр. 3.13. Пусть $\mathbf{X} = \{X_t, \, t \geqslant 0\}$ – гауссовский процесс такой, что для всех $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$

$$\mathsf{E}(X_t - X_s) = (t-s)c, \quad \mathsf{D}(X_t - X_s) = f(t-s), \tag{3.32}$$

где $c \in \mathbb{R}$, а функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$). Тогда $\mathbf{X}$ – процесс со стационарными приращениями.

Упр. 3.14. Покажите, что для процесса дробного броуновского движения с показателем $\alpha \in (0,2]$

$$\mathsf{E}(W_s^{(\alpha)} - W_t^{(\alpha)})^2 = |s-t|^\alpha, \; s,t \geqslant 0. \tag{3.33}$$

Пусть (T, ρ) – метрическое пространство с фиксированной точкой θ. **Броуновской** (действительной) **функцией Леви над** T называется центрированный действительный гауссовский процесс $B^L = \{B^L(t), \, t \in T\}$ с ковариационной функцией

$$R(s,t) = \frac{1}{2}(\rho(s,\theta) + \rho(t,\theta) - \rho(s,t)). \tag{3.34}$$

Сложность, однако, состоит в том, что не для любой метрики ρ формула (3.34) задает неотрицательно определенную функцию.

Упр. 3.15. Гауссовская с.ф. $\mathbf{X} = \{X_t,\, t \in T\}$ будет броуновской функцией Леви на T тогда и только тогда, когда $X_\theta = 0$ п.н. и $\mathsf{E}(X_s - X_t)^2 = \rho(s,t)$ (при этом вопрос о неотрицательной определенности функции в (3.34) не снимается).

Если $(T, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство (в частности, $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой $|\cdot|$), то броуновским движением Леви называется гауссовская с.ф. с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \frac{1}{2}(\|s\| + \|t\| - \|s-t\|). \tag{3.35}$$

В многомерном случае аналог (3.31) дает определение *случайного поля Леви – Шемберга*. Это такая центрированная гауссовская с.ф. $V^{(\alpha)} = \{V^{(\alpha)}(t), t \in \mathbb{R}^d_+ = [0,\infty)^d\}$, для которой

$$\operatorname{cov}(V^{(\alpha)}(s), V^{(\alpha)}(t)) = \frac{1}{2}(|s|^\alpha + |t|^\alpha - |t-s|^\alpha),\ s,t \in \mathbb{R}^d_+. \tag{3.36}$$

Случайным полем Леви – Ченцова называется действительная гауссовская функция $\mathbf{X} = \{X_t,\, t \in \mathbb{R}^d_+\}$ такая, что

$$\mathsf{E}X_t = 0 \text{ и } \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}, \tag{3.37}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}^d_+$.

Докажем, что такое поле всегда существует. Пусть $W_k(t)$, $t \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, d$ – независимые броуновские движения (мы можем построить W_k на $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$, а затем взять $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \times \ldots \times (\Omega_d, \mathcal{F}_d, P_d)$. Положим $Y(t) = W_1(t_1)\cdots W_d(t_d)$ для $t \in \mathbb{R}^d_+ = [0,\infty)^d\}$. Тогда

$$\mathsf{E}Y(t) = 0 \text{ и } \operatorname{cov}(Y(s), Y(t)) = \prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}. \tag{3.38}$$

Следовательно, $\prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}$ является симметричной неотрицательно определенной функцией. Таким образом, остается воспользоваться теоремой 3.6.

Упр. 3.16. Что можно сказать о поведении поля Леви – Ченцова на координатных плоскостях $\mathbb{R}^d$?

Назовем *приращениями поля* $\{X_t,\, t \in \mathbb{R}^d\}$ *на классе прямоугольников* (параллелепипедов) $B = (a,b] = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ с.ф. вида

$$Y(B) = \sum (-1)^{\|\varepsilon\|} X(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \ldots, \varepsilon_d a_d + (1-\varepsilon_d)b_d), \tag{3.39}$$

где сумма берется по всем векторам $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, имеющим компонентами 0 или 1, а $\|\varepsilon\| = \sum_{k=1}^d \varepsilon_k$.

Упр. 3.17. Докажите, что $\{Y(B),\, B \in \Pi\}$, где Π – совокупность прямоугольников $B = (a,b]$, есть гауссовская случайная функция. Найдите ее среднее и ковариационную функцию.

Упр. 3.18. Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ и непересекающихся прямоугольников $B_1, \ldots, B_n \in \Pi$ величины $Y(B_1), \ldots, Y(B_n)$ – независимы. Дайте определение поля Леви – Ченцова в терминах величин $Y(B)$, $B \in \Pi$, аналогичное определению, содержащемуся в следствии 2.15 для винеровского процесса.

Определим **процесс Орнштейна – Уленбека** с параметрами $\alpha, \beta > 0$ формулой

$$V_t = e^{-\beta t} W(\alpha e^{2\beta t}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.40}$$

где W – стандартное броуновское движение.

Упр. 3.19. Докажите, что $\{V_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ – гауссовский процесс и найдите его ковариационную функцию.

Упр. 3.20. Найдите ковариационную функцию пуассоновского процесса.

Теперь мы обратимся к **описанию стохастически непрерывных процессов, имеющих независимые приращения**. Нам понадобится несколько простых упражнений.

Упр. 3.21. Пусть $\mathbf{X} = \{X_t,\ t \in [a,b]\}$ – действительный процесс, стохастически непрерывный в каждой точке $t \in [a,b]$ (см. (2.35)). Тогда $\mathbf{X}$ является равномерно стохастически непрерывным на $[a,b]$, т.е. для любых $\varepsilon, \gamma > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\varepsilon, \gamma)$ такое, что

$$P(|X_t - X_s| \geqslant \varepsilon) \leqslant \gamma,\ \text{если } |s-t| \leqslant \Delta,\ s,t \in [a,b]. \tag{3.41}$$

Упр. 3.22. Пусть выполнены условия упр. 3.21. Тогда процесс $\mathbf{X}$ ограничен по вероятности, т.е.

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} P(|X_t| \geqslant c) = 0. \tag{3.42}$$

Упр. 3.23. Пусть выполнены условия упр. 3.21. Тогда

$$P(\sup_{t\in M\cap[a,b]} |X_t| < \infty) = 1, \tag{3.43}$$

где M – множество двоично-рациональных точек прямой. Указание: воспользуйтесь **неравенством Оттавиани**: если $Y_k,\ k = 1,\dots,n$ – независимые действительные величины и для некоторых $\alpha \in [0,1)$, $r \geqslant 0$

$$P(|S_n - S_k| \geqslant r) \leqslant \alpha \text{ при } k = 1,\dots,n, \tag{3.44}$$

где $S_k = \sum_{j=1}^k Y_j$, то для всех $c \geqslant 0$

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant r + c) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} P(|S_n| \geqslant c). \tag{3.45}$$

Определим *пространство Скорохода* $D[0,\infty)$ как множество действительных функций, заданных на $[0,\infty)$, непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева в каждой точке $t \in (0,\infty)$.

Упр. 3.24. Докажите, что **стохастически непрерывный на** $[0,\infty)$ **процесс с независимыми приращениями имеет п.н. модификацию с траекториями из пространства** $D[0,\infty)$.

Упр. 3.25. Докажите, что пуассоновский процесс стохастически непрерывен на $[0,\infty)$.

Теорема Д3.26 (формула Хинчина, см., напр., [?]). *Пусть $\{X_t,\, t \in [0,\infty)\}$ – стохастически непрерывный действительный процесс с независимыми приращениями. Тогда для любого $t \in [0,\infty)$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\mathsf{E}\exp\{i\lambda X_t\} = \exp\{t(ia\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda,x)\mu(dx))\}, \tag{3.46}$$

где $a \in \mathbb{R}$, μ – неотрицательная конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$g(\lambda,x) = \begin{cases} (\exp\{i\lambda x\} - 1 - i\lambda\sin x)(1+x^2)/x^2, & x \neq 0, \\ -\lambda^2/2, & x = 0. \end{cases} \tag{3.47}$$

При этом представление (3.46) *единственно, т.е. в этой формуле число a и мера μ определены однозначно.*

Теорема Д3.27 (формула Леви, см., напр., [?]). *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда для любого $t \in [0,\infty)$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\mathsf{E}\exp\{i\lambda X_t\} = \exp\{t(ia\lambda - \sigma^2\lambda^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda\sin x)L(dx))\}, \tag{3.48}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, а L – неотрицательная (вообще говоря, бесконечная) мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, такая, что

$$L(\{0\}) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2/(1+x^2)L(dx) < \infty. \tag{3.49}$$

При этом a, σ и L, фигурирующие в представлении (3.49), *определены однозначно.*

Упр. 3.28. Покажите, как из формулы Хинчина выводится формула Леви и наоборот. Какова при этом связь между параметрами a, μ и a, σ^2, L?

Упр. 3.29. Как выглядит формула Леви для процесса $W_x(t) = x + W(t)$, $t \geqslant 0$, где W – винеровский процесс, а $x \in \mathbb{R}$?

Исследованию процессов с независимыми приращениями посвящена монография [?]. Приведем еще один очень красивый результат о поведении приращений винеровского процесса.

Теорема Д3.30 (закон Эрдёша – Реньи, см., [?]). *Для каждого $c > 0$ имеет место соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T - c\log T} |W(t + c\log t) - W(t)|/\log T = \sqrt{2c} \text{ п.н.} \tag{3.50}$$

Различные обобщения этого закона содержатся в работах [?].

Лекция 4. Свойства траекторий броуновского движения

Недифференцируемость п.н. траекторий винеровского процесса ни в одной точке $[0, \infty)$. Марковское свойство винеровского процесса. Марковские моменты, σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$. Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0, t]$. Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма. Броуновский мост.

Следующий результат показывает, сколь нерегулярно устроены траектории винеровского процесса.

Теорема 4.1. *С вероятностью единица траектории винеровского процесса W не дифференцируемы ни в одной точке полуоси $[0, \infty)$.*

$\square$ Рассмотрим промежуток $[k, k+1)$, где $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Для $\omega \in \Omega$ из дифференцируемости $W(\cdot, \omega)$ хотя бы в одной точке $s \in [k, k+1)$ вытекала бы дифференцируемость справа в s, а это влекло бы, что существуют $q, l \in \mathbb{N}$ ($q = q(\omega, s)$, $l = l(\omega, s, q(s, \omega))$), такие что

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| < l(t - s) \ \text{ при всех } \ t \in [s, s + q^{-1}) \subset [k, k+1). \tag{4.1}$$

Для $l, n, i \in \mathbb{N}$ (и фиксированного k) введем события

$$A_{l,n,i} = \left\{\omega\colon \ \left|W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right)\right| < \frac{7l}{n} \ \text{ при } \ j = i+1, i+2, i+3\right\}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим l и q, фигурирующие в (4.1). Если $4/n < 1/q$ и $i = i(s, n)$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) выбрано так, что $k + (i-1)/n \leqslant s < k + i/n$, то для $j = i+1, i+2, i+3$ и ω,

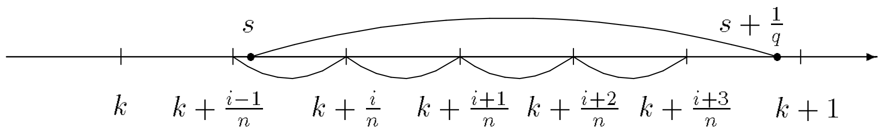

Рис. 4.3

удовлетворяющих (4.1), получим

$$\left|W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right)\right| \leqslant \left|W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W(s, \omega)\right| + \\ + \left|W(s, \omega) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right)\right| \leqslant l \cdot \frac{4}{n} + l \cdot \frac{3}{n} = \frac{7l}{n}.$$

Поэтому если для ω справедливо (4.1), то $\omega \in \bigcap\limits_{n>4q} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{l,n,i}$. Пусть $D_k = \{\omega\colon \ W(\cdot, \omega)$ дифференцируема хотя бы в одной точке $s \in [k, k+1)\}$ (если $s = k$, то подразумевается дифференцируемость справа). Из проведенных рассуждений следует, что

$$D_k \subset \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}. \tag{4.3}$$

Теперь заметим, что для любой последовательности событий $B_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} P(B_n).$$

Поэтому для каждых $q, l \in \mathbb{N}$, принимая во внимание независимость приращений W, получим

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\Big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\Big) \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_{l,n,i}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} n\left(P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \frac{7l}{n}\right)\right)^3 = \\ &= \liminf_{n\to\infty} n\left(P\left(|W(1)| < \frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3 \leqslant \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{14\,l}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Мы использовали, что $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$, $t \geqslant 0$, и для $z > 0$

$$P(|W(1)| < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2z.$$

Оценка (4.4) объясняет, почему в (4.2) надо было рассмотреть приращения W на трех промежутках $[(j-1)/n, j/n)$, $j = i+1, i+2, i+3$. Учитывая, что объединение счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль и то, что $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полно, из (4.3), (4.4) заключаем, что $P(D_k) = 0$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если D — множество точек ω, для которых $W(\cdot, \omega)$ дифференцируема хотя бы в одной точке $s \in [0, \infty)$, то $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$. Следовательно, $P(D) = 0$. $\square$

Для дальнейшего анализа поведения траекторий броуновского движения нам понадобятся некоторые новые понятия и вспомогательные утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ — независимые алгебры *в* $\mathcal{F}$, *т. е.*

$$P(A_1, A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0 \quad \text{для любых} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2. \tag{4.5}$$

Тогда независимы $\sigma\{\mathcal{A}_1\}$ *и* $\sigma\{\mathcal{A}_2\}$, *т. е.* (4.5) *справедливо для всех* $A_1 \in \sigma\{\mathcal{A}_1\}$, $A_2 \in \sigma\{\mathcal{A}_2\}$.

$\square$ Для любого $A \in \sigma\{\mathcal{A}\}$ и любого $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{A}$ — алгебра в $\mathcal{F}$, существует $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, такое что $P(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$. Класс множеств, допускающих указанную аппроксимацию, образует σ-алгебру. Действительно, $\Omega \triangle \Omega = \varnothing$, $\overline{A} \triangle \overline{B}_\varepsilon = A \triangle B_\varepsilon$ и если $P(A_n \triangle B_{n,\varepsilon}) < \varepsilon 2^{-n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $P\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n,\varepsilon}\Big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т. к. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n,\varepsilon} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \triangle B_{n,\varepsilon})$. Остается выбрать $n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $P\Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_{n,\varepsilon}\Big) < \varepsilon/2$.

Теперь для $A \in \sigma\{\mathcal{A}_1\}$, $B \in \sigma\{\mathcal{A}_2\}$ и любого $\varepsilon > 0$ находим $A_\varepsilon \in \mathcal{A}_1$ и $B_\varepsilon \in \mathcal{A}_2$, такие что $P(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$, $P(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$. Учитывая, что $AB \triangle A_\varepsilon B_\varepsilon \subset$ $\subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon)$, видим, что $|P(AB) - P(A)P(B)| < 4\varepsilon$. $\square$

Пусть имеется с.ф. $X = \{X_t,\ t \in T\}$, т. е. семейство $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}_t$-измеримых с.э. $X_t\colon \Omega \to \mathcal{X}_t$, $t \in T$. Для $V \subset T$ положим $\sigma_X(V) = \sigma\{X_t,\ t \in V\} := \sigma\{X_t^{-1}(\mathcal{B}_t),\ t \in V\}$. Согласно лемме 1.1 и теореме 1.4 $\sigma_X(V) = \mathbf{X}^{-1}(\mathcal{B}_V)$ ($X_t = \pi_{T,t}\mathbf{X}$, поэтому $\sigma\{X_t^{-1}(\mathcal{B}_t),\ t \in V\} = \sigma\{\mathbf{X}^{-1}(\pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t),\ t \in V\} = \sigma\{\mathbf{X}^{-1}(\{\pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t,\ t \in V\})\} = \mathbf{X}^{-1}(\sigma\{\pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t,\ t \in V\}) = \mathbf{X}^{-1}(\mathcal{B}_V)$). *С.ф. $\{X(t),\ t \in V\}$ называется не зависящей от σ-алгебры $\mathcal{E}$,* если независимы $\sigma_X(V)$ и $\mathcal{E}$. Если с.ф. X задана для $T \subset \mathbb{R}$, то обозначим $\mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma_X((-\infty, t] \cap T)$.

Теорема 4.3 (марковское свойство). *Для любого фиксированного $a \geqslant 0$ процесс $X(t) = W(t+a) - W(a)$, $t \geqslant 0$, является винеровским процессом, не зависящим от σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leqslant a} = \sigma\{W(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant a\}$.*

□ Очевидно, $X(0) = 0$, процесс X имеет непрерывные траектории, независимые приращения и $X(t) - X(s) = W(t+a) - W(s+a) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

В $\mathcal{X}_T$ ($T \subset \mathbb{R}$) цилиндр $\{x\colon\ (x(s_1), \ldots, x(s_n)) \in B\}$ для $s_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$ ($s_i \neq s_j$ при $i \neq j$), $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ может быть записан в виде $\{x\colon\ (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in \hat{B}\}$, где точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — это пронумерованные в возрастающем порядке точки $s_1, \ldots, s_n$, т. е. $(s_1, \ldots, s_n) = \psi(t_1, \ldots, t_n)$, $\hat{B} = \Psi^{-1}B$, см. (2.6). Пусть, $C = \{\omega\colon\ (X(t_1), \ldots, X(t_n)) \in B\}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$. Положим $\xi_j = W(t_j + a) - W(t_{j-1} + a)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $C = \{\omega\colon\ (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n) \in B\} = ((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \tilde{B})$, где $\tilde{B} = H^{-1}B$, матрица n -го порядка H имеет нули над главной диагональю, а остальные элементы равны 1 (мы учли, что при непрерывном отображении, задаваемом матрицей H, прообраз борелевского множества является борелевским). Аналогично, для $m \in \mathbb{N}$, $0 = u_0 \leqslant u_1 < \ldots < u_m \leqslant a$, $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ цилиндр $\{(W(u_1), \ldots, W(u_m)) \in G\} = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \tilde{G}\}$, где $\tilde{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $\zeta_i = W(s_i) - W(s_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$. Остается воспользоваться теоремой 1.5 и леммой 4.2. □

Естественно возникает вопрос: **можно ли обобщить теорему 4.3, взяв вместо константы a случайную величину?** Оказывается, это можно сделать для определенного класса случайных величин.

Пусть $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, — некоторый *поток σ-алгебр* в $\mathcal{F}$ («*фильтрация*»), т. е. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ для $s \leqslant t$ ($s, t \in T$) и $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при всех $t \in T$.

Отображение $\tau\colon \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом* относительно потока $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$, если $\{\omega\colon\ \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Если $\tau(\omega) < \infty$ п.н., то τ называют *моментом остановки.*

Удобно считать $\mathcal{F}$ и все $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ ($t \in T$) пополненными.

Важные примеры марковских моментов дает

Теорема 4.4. *Пусть $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ — с.ф. со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ при каждом $t \geqslant 0$. Пусть траектории X непрерывны для п.в. ω. Тогда для любого замкнутого множества $F \subset \mathcal{X}$*

$$\tau_F(\omega) := \inf\{t \geqslant 0\colon\ X_t(\omega) \in F\} \tag{4.6}$$

есть марковский момент относительно потока $\mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{X_s\colon\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, называемого естественной фильтрацией *($\tau_F(\omega) = \infty$, если $X_t(\omega) \notin F$ для всех $t \geqslant 0$).*

□ Будем всюду далее рассматривать точки $\omega \in \tilde{\Omega}$, для которых траектории X непрерывны ($P(\tilde{\Omega}) = 1$).

1. Пусть G — открытое подмножество $\mathcal{X}$ и τ_G определяется согласно (4.6) с заменой F на G. Тогда для любого $0 \leqslant t < \infty$

$$\{\omega\colon\ \tau_G(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_{\leqslant t}. \tag{4.7}$$

Заметим, что $\{\tau_G < t\} = \bigcup\limits_{\substack{r<t\\ r\in\mathbb{Q}_+}} \{X_r \in G\}$, где $\mathbb{Q}_+$ — множество неотрицательных рациональных чисел. Действительно, если для некоторого $r < t$, $r \in \mathbb{Q}_+$, имеем $X_r(\omega) \in G$, то $\tau_G(\omega) \leqslant r < t$. Обратно, пусть $\tau_G(\omega) < t$. Тогда найдется $s = s(\omega) < t$, такое что $X_s(\omega) \in G$. Поскольку G — открытое множество, а траектория $X_t(\omega)$ непрерывна справа, то $X_z(\omega) \in G$ для всех z, достаточно близких к точке s справа. Среди таких z есть рациональные $r < t$. Для доказательства (4.7) остается учесть, что $\{X_r \in G\} \in \mathcal{F}_{\leqslant r} \subset \mathcal{F}_{\leqslant t}$ для $r < t$.

2. Рассмотрим открытые множества $G_n = \{x \in \mathcal{X}\colon\ \rho(x,F) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\rho(x,F) = \inf\{\rho(x,y)\colon\ y \in F\}$. Положим $\tau_n = \tau_{G_n}$ и докажем, что $\tau_n(\omega) \to \tau_F(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех ω (из $\tilde{\Omega}$). Очевидно, $\tau_n(\omega) \leqslant \tau_F(\omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \tilde{\Omega}$, т. к. $F \subset G_n$. Аналогично, $\tau_n(\omega) \leqslant \tau_{n+1}(\omega)$, т. к. $G_{n+1} \subset G_n$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует

$$\tau_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) \in [0,\infty], \quad \text{причем} \quad \tau_\infty(\omega) \leqslant \tau_F(\omega). \tag{4.8}$$

Если $\tau_\infty(\omega) = \infty$, то $\tau_F(\omega) = \infty$. Рассмотрим $\Omega_0 = \{\omega \in \tilde{\Omega}\colon\ \tau_\infty(\omega) < \infty\}$. В силу непрерывности справа траектории $X_t(\omega)$ имеем $X_{\tau_n(\omega)}(\omega) \in [G_n]$ (замыкание G_n) для $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $X_{\tau_k(\omega)}(\omega) \in [G_n]$ для $k \geqslant n$ ($G_k \subset G_n$, поэтому $[G_k] \subset [G_n]$), и следовательно, в силу непрерывности слева траектории X_t

$$X_{\tau_\infty(\omega)}(\omega) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [G_n] = F.$$

Таким образом, $\tau_F(\omega) \leqslant \tau_\infty(\omega)$. Учитывая (4.8), получаем, что

$$\tau_F(\omega) = \tau_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) \quad \text{для всех} \quad \omega \in \tilde{\Omega}. \tag{4.9}$$

3. Теперь заметим, что $\{\tau_F = 0\} = \{X_0 \in F\}$ (снова учли непрерывность справа траектории и замкнутость множества F). Итак, $\{\tau_F \leqslant 0\} \in \sigma\{X_0\} = \mathcal{F}_{\leqslant 0}$. Покажем, что для $0 < t < \infty$

$$\{\omega\colon\ \tau_F(\omega) \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \tau_n(\omega) < t\}. \tag{4.10}$$

Если $\tau_n(\omega) < t$, $n \in \mathbb{N}$, то в силу (4.9) $\tau_F(\omega) \leqslant t$. Если $\tau_F(\omega) \leqslant t$, то $\tau_n(\omega) \leqslant \tau_F(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\tau_F(\omega) = 0$, то и $\tau_n(\omega) = 0$, поэтому при таком ω имеем $\{\tau_n(\omega) < t\}$. Пусть теперь $\omega \in \Omega' = \{0 < \tau_F(\omega) \leqslant t\}$. Докажем, что $\tau_n(\omega) < \tau_F(\omega)$ для таких ω при всех $n \in \mathbb{N}$. Для $\omega \in \Omega'$ имеем $\tau_n(\omega) \to \tau_F(\omega) > 0$. Поэтому при всех достаточно больших n $X_{\tau_n(\omega)}(\omega) \in \partial G_n$ (границе G_n), т. к. в любой окрестности этой точки найдутся как точки, входящие в G_n, так и не содержащиеся в G_n. Действительно, G_n — открытое множество, а траектории непрерывны справа, кроме того, $X_t(\omega) \notin G_n$ для $t < \tau_n(\omega)$. Учитывая, что $\partial G_n \subset \{x\colon\ \rho(s,F) = 1/n\}$, получаем, что $\tau_n(\omega) < \tau_{n+1}(\omega)$ для $\omega \in \Omega'$ и всех достаточно больших n ($\rho(X_{\tau_n(\omega)}(\omega),F) = 1/n$, $\rho(X_{\tau_{n+1}(\omega)}(\omega),F) = 1/(n+1)$, поэтому $\tau_n(\omega) \neq \tau_{n+1}(\omega)$), следовательно, $\tau_n(\omega) < \tau_F(\omega)$ при всех $n \geqslant 1$ и $\omega \in \Omega'$. Остается заметить, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\tau_n(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$ согласно (4.10). □

Пусть τ — марковский момент относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in T$. **Определим $\mathcal{F}_\tau$ как совокупность событий A, таких что $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого** $t \in T$. Легко проверить, что $\mathcal{F}_\tau$ есть σ-алгебра. Наглядно можно представлять себе, что речь идет о событиях, «наблюдаемых до случайного момента τ».

Теорема 4.5 (строго марковское свойство). *Пусть τ — момент остановки относительно потока $\mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{W(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$. Тогда $Y(t) = W(t+\tau) - W(\tau)$, $t \geqslant 0$, есть винеровский процесс, который не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ (построенной по семейству $\mathcal{F}_{\leqslant t}$, $t \geqslant 0$). Точнее говоря,*

$$Y_\tau(\omega) = \begin{cases} W(t+\tau(\omega),\omega) - W(\tau(\omega),\omega) & \text{для } \omega \in \Omega_\tau = \{\tau < \infty\}, \\ 0, \quad \omega \notin \Omega_\tau. \end{cases} \tag{4.11}$$

□ Введем случайные величины $\tau_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n}\mathbb{1}_{A_{k,n}}$, где $A_{1,n} = \{\tau \leqslant 2^{-n}\}$, $A_{k,n} = \{(k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leqslant k2^{-n}\}$ для $k \geqslant 2$. Очевидно, $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega_\tau$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ величина τ_n есть марковский момент относительно потока $\mathcal{F}_{\leqslant t}$, т. к. для любого $t \geqslant 0$

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \{\tau \leqslant k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t, \quad \text{где} \quad k = \max\{l\colon\ l2^{-n} \leqslant t\}.$$

В силу непрерывности (при всех ω) броуновского движения имеем $W(t+\tau_n(\omega),\omega) \to W(t+\tau(\omega),\omega)$ при $n \to \infty$ для каждого $t \geqslant 0$ и $\omega \in \Omega_\tau$. При всех $n \in \mathbb{N}$ и любых $t \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \{\omega\colon\ W(t+\tau_n(\omega),\omega) \leqslant z\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega\colon\ W(t+\tau_n(\omega),\omega) \leqslant z,\ \tau_n(\omega) = k2^{-n}\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega\colon\ W(t+k2^{-n},\omega) \leqslant z,\ \tau_n(\omega) = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Мы учли, что если τ — марковский момент, то $\{\tau = y\} = \{\tau \leqslant y\} \setminus \{\tau < y\} \in \mathcal{F}_{\leqslant y}$ при всех $y \in \mathbb{R}$, поскольку $\{\tau < y\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\tau \leqslant y - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F}_{\leqslant y}$ ($\mathcal{F}_{\leqslant y-\frac{1}{k}} \subset \mathcal{F}_{\leqslant y}$ для всех $y \geqslant 0$ и k, таких что $y - \frac{1}{k} \geqslant 0$; если $y - \frac{1}{k} < 0$, то $\left\{\tau \leqslant y - \frac{1}{k}\right\} = \varnothing$).

Нам понадобится следующий результат.

Лемма 4.6. *Пусть $(\mathcal{M},\mathcal{A})$ — измеримое пространство, $(\mathcal{N},\rho)$ — метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{N})$. Пусть $F_n\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ являются $\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{N})$-измеримыми отображениями при $n = 1,2,\ldots$. Пусть $F_n(x) \xrightarrow{\rho} F(x) \in \mathcal{N}$ для всех $x \in \mathcal{M}$ $(n \to \infty)$. Тогда F есть $\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{N})$-измеримое отображение.*

□ Легко видеть, что для любого замкнутого множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$

$$\{x\colon\ F(x) \in B\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant m}\{x\colon\ F_n(x) \in B^{(1/k)}\},$$

где $B^{(\varepsilon)} = \{x \in \mathcal{N}\colon\ \rho(x,B) < \varepsilon\}$, $\rho(x,B) = \inf\{\rho(x,y)\colon\ y \in B\}$. Остается воспользоваться следствием 1.2. □

Замечание 4.7. Пусть в условиях леммы 4.6 на $(\mathcal{M},\mathcal{A})$ задана мера P и $F_n(x) \xrightarrow{\rho} F(x)$ при $n \to \infty$ для P-п.в. $x \in \mathcal{M}$. Тогда F является $\overline{\mathcal{A}}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{N})$-измеримым отображением, где $\overline{\mathcal{A}}$ — пополнение $\mathcal{A}$ по мере P.

□ Пусть $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, для $x \in \mathcal{M}_0$, где $P(\mathcal{M}_0) = 1$. Выберем точку $z_0 \in \mathcal{N}$ и определим $\widetilde{F}_n(x) = F_n(x)$ для $x \in \mathcal{M}_0$ и $\widetilde{F}_n(x) = z_0$ для $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\widetilde{F}_n(x) \to \widetilde{F}(x)$ для всех $x \in \mathcal{M}$, где $\widetilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathcal{M}_0$ и $\widetilde{F}(x) = z_0$ при $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, причем $\widetilde{F}$ является $\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{N})$-измеримым отображением. Теперь учтем, что для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ прообраз

$$F^{-1}(B) = \{\mathcal{M}_0 \cap \widetilde{F}^{-1}(B)\} \cup \{(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0) \cap F^{-1}(B)\} \in \overline{\mathcal{A}},$$

поскольку $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{A}$, $\widetilde{F}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (по лемме 4.6) и $(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0) \cap F^{-1}(B) \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, $P(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0) = 0$. $\square$

По замечанию 4.7 и в силу (4.12) $Y(t)$ есть случайная величина для каждого t. Если ζ является $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой величиной, $\tilde{\zeta} = \zeta$ п.н., то с.в. $\tilde{\zeta}$ также $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измерима ($\mathcal{F}$ пополнена). Очевидно также, что траектории $Y(\cdot)$ непрерывны.

Докажем, что Y не зависит от $\mathcal{F}_\tau$ и попутно убедимся, что Y — винеровский процесс.

Как и при доказательстве теоремы 4.3, достаточно проверить, что для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$, любого $n \in \mathbb{N}$, любых $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m$, любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$P(A \cap \{\xi \in B\}) = P(A)P(\xi \in B), \tag{4.13}$$

где $\xi = (Y(t_1), \ldots, Y(t_m))$. В (4.13) достаточно рассматривать лишь замкнутые B (по лемме 2.3 для любого B и любого $\varepsilon > 0$ можно найти замкнутое $F_\varepsilon \subset B$, такое что $P_\xi(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$). Перепишем (4.13) в виде

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\xi \in B\}} = \mathsf{E}\mathbb{1}_A \mathsf{E}\mathbb{1}_{\{\xi \in B\}}. \tag{4.14}$$

Достаточно доказать, что для каждой непрерывной ограниченной функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ верно равенство

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{1}_A \mathsf{E} f(\xi). \tag{4.15}$$

Из (4.15) легко получить (4.14). Возьмем $f_k(x) = \varphi(k\rho(x, B))$, где $\varphi(t) = 1$ при $t \leqslant 0$, $\varphi(t) = 1 - t$ при $t \in [0, 1]$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant 1$, $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y)\colon\ y \in B\}$, ρ — евклидово расстояние. Суперпозиция непрерывной и непрерывной ограниченной функции дает непрерывную ограниченную функцию ($\rho(\cdot, B)$ непрерывна для замкнутого B), поэтому применяем теорему Лебега о мажорируемой сходимости, учитывая, что $f_k(x) \downarrow \mathbb{1}_B(x)$, $k \to \infty$.

Снова по теореме Лебега для любого A

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A f(\xi) = \lim_n \mathsf{E}\mathbb{1}_A f(\xi_n),$$

где $\xi_n = (W(t_1 + \tau_n) - W(\tau_n), \ldots, W(t_m + \tau_n) - W(\tau_n)) \to \xi$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega_\tau$. Теперь заметим, что в силу счетной аддитивности интеграла Лебега

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_A f(\xi_n) \mathbb{1}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,k}), \tag{4.16}$$

где $\xi_{n,k} = (W(t_1 + k2^{-n}) - W(k2^{-n}), \ldots, W(t_m + k2^{-n}) - W(k2^{-n}))$. Если ν — марковский момент относительно потока $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$ и $A \in \mathcal{F}_\nu$, то $A \cap \{\nu < t\} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \left(A \cap \left\{\nu \leqslant t - \dfrac{1}{q}\right\}\right) \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$ для каждого $t \in T$ и $A \cap \{\nu = t\} = (A \cap \{\nu \leqslant t\}) \setminus (A \cap \{\nu < t\}) \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$. Поэтому $A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{\leqslant k2^{-n}}$ для $A \in \mathcal{F}_\tau$. По теореме 4.3 σ-алгебра $\mathcal{F}_{\leqslant k2^{-n}}$ не зависит от $\xi_{n,k}$ и распределение $\xi_{n,k}$ такое же, как у вектора

$(W(t_1), \dots, W(t_m))$. Таким образом, правая часть (4.16) равна следующему выражению:

$$\mathsf{E} f(W(t_1), \dots, W(t_m)) \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} \mathbb{1}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} = \mathsf{E} f(W(t_1), \dots, W(t_m)) \mathsf{E} \mathbb{1}_A.$$

Взяв $A = \Omega$, получим для любой непрерывной ограниченной f, всех $m \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m$, что

$$\mathsf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) = \mathsf{E} f(W(t_1), \dots, W(t_m)). \tag{4.17}$$

Тем самым (4.15) доказано. Из (4.17), совершив предельный переход к индикаторным функциям, получим, что конечномерные распределения Y и W совпадают. Следовательно, Y — винеровский процесс. □

Строго марковское свойство мы используем для нахождения распределений некоторых функционалов от броуновского движения. При этом будет доказан ряд вспомогательных результатов (другие формы строго марковского свойства рассмотрены в дополнении к лекции 14).

Пусть τ — момент остановки относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{W(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Для $\omega \in \Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ ($P(\Omega_\tau) = 1$) рассмотрим «отраженный процесс»

$$Z(t, \omega) = \begin{cases} W(t, \omega), & 0 \leqslant t \leqslant \tau(\omega), \\ 2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega), & t > \tau(\omega), \end{cases} \tag{4.18}$$

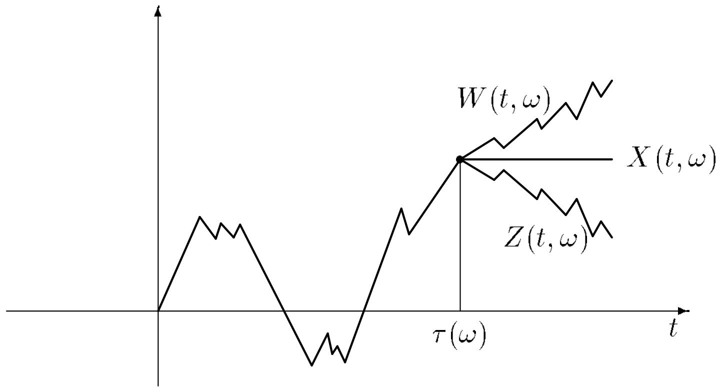

Рис. 5.1

и пусть $Z(t, \omega) = W(t, \omega)$ для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_\tau$. Напомним, что **пополненными считаются все рассматриваемые σ-алгебры из $\mathcal{F}$.**

Теорема 4.8 (принцип отражения). *Процесс $\{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ есть броуновское движение.*

□ Для каждого фиксированного $t \geqslant 0$ имеем $Z(t, \omega) = W(t, \omega) \mathbb{1}_{\{\tau \geqslant t\}} + (2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega)) \mathbb{1}_{\{\tau < t\}}$. Поэтому, пользуясь (4.12), видим, что $Z(t, \cdot)$ при каждом t является случайной величиной. Кроме того, траектории $Z(\cdot, \omega)$ непрерывны при всех $\omega \in \Omega$. Учитывая лемму **??** и то, что $Z(0, \omega) \equiv 0$, видим, что $Z(\cdot, \omega)$ есть с.э. со значениями в пространстве $C_0[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty)\colon f(0) = 0\}$, снабженном метрикой (3.20), где $K_n = [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $Y(t,\omega)$ — процесс, определенный формулой (4.11). Введем еще «остановленный процесс» $X(t,\omega) = W(t \wedge \tau(\omega),\omega)$, $t \geqslant 0$, где $t \wedge s = \min\{t,s\}$ ($X(t,\omega) = W(t,\omega)$ для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_\tau$). Аналогично сказанному выше убеждаемся, что $X(\cdot,\omega)$ — с.э. со значениями в $C_0[0,\infty)$.

Определим отображение (приклеивание в точке b к функции f функции g) $h\colon \mathcal{Y} \to C_0[0,\infty)$, где $\mathcal{Y} = [0,\infty) \times C_0[0,\infty) \times C_0[0,\infty)$, положив

$$h(b, f(\cdot), g(\cdot))(t) = f(t)\mathbb{1}_{[0,b]}(t) + (f(b) + g(t-b))\mathbb{1}_{(b,\infty)}(t).$$

Заметим, что для всех $\omega \in \Omega_\tau$

$$\begin{aligned} h(\tau(\omega), X(\cdot,\omega), Y(\cdot,\omega)) &= W(\cdot,\omega), \\ h(\tau(\omega), X(\cdot,\omega), -Y(\cdot,\omega)) &= Z(\cdot,\omega). \end{aligned}$$

Замечание 4.9. Если ξ и η –с.э. на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ и $\xi = \eta$ п.н., то $P_\xi = P_\eta$ на $\mathcal{B}$. Поэтому **далее без ограничения общности считаем** $\Omega_\tau = \Omega$.

Теорема будет доказана, если **мы покажем**: а) $h \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}) \,|\, \mathcal{B}(C_0[0,\infty))$ (берется произведение трех польских пространств, в $C_0[0,\infty)$ рассматривается метрика (3.20); см. лемму 2.1); б) распределения с.э. (τ, X, Y) и $(\tau, X, -Y)$ совпадают в $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$.

Действительно, тогда $P_W = P_{(\tau,X,Y)}h^{-1}$ и $P_Z = P_{(\tau,X,-Y)}h^{-1}$.

Проверка а). Возьмем любую функцию $H \in C_0[0,\infty)$ и любое $r \geqslant 0$. В силу замечания 2.2 достаточно проверить, что $A = \{(b,f,g) \in \mathcal{Y}\colon\ \rho(h(b,f,g),H) \leqslant r\} \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$. Достаточно убедиться, что для каждого $t \in M$, где M — счетное всюду плотное множество на $[0,\infty)$, имеем $A_t = \{(b,f,g) \in \mathcal{Y}\colon\ \alpha \leqslant h(b,f,g)(t) \leqslant \beta\} \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ для $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Далее следует учесть, что при фиксированном t отображение $\pi_t h : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ является непрерывным, здесь $\pi_t = \pi_{[0,\infty),t}$, см. с. 4.

Докажем утверждение б). Ключевую роль здесь играет

Лемма 4.10. *$X(t,\cdot)$ есть $\mathcal{F}_\tau \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримый с.э. для каждого $t \geqslant 0$.*

□ Возьмем

$$\alpha_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}(\tau(\omega)).$$

Тогда $\alpha_n(\omega) \uparrow \tau(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega_\tau$ ($n \to \infty$), значит, $W(t \wedge \alpha_n(\omega),\omega) \to W(t \wedge \tau(\omega),\omega)$ для каждого $t \geqslant 0$ и всех $\omega \in \Omega_\tau$ (W, а следовательно и X, имеют непрерывные траектории для всех $\omega \in \Omega$). В силу замечания 4.7 достаточно убедиться в $\mathcal{F}_\tau \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримости величины $W(t \wedge \alpha_n(\cdot),\cdot)$ (**σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ считается полной**). Для $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $C = \{\omega\colon\ W(t \wedge \alpha_n(\cdot),\cdot) \in B\}$ и $s \in [(m-1)/2^n, m/2^n)$, где $n, m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} C \cap \{\tau \leqslant s\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau \leqslant s,\ \alpha_n = \frac{k-1}{2^n},\ W\left(t \wedge \frac{k-1}{2^n}, \cdot\right) \in B\} = \\ &= \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m-1} \left\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k}{2^n},\ W\left(\frac{k-1}{2^n} \wedge t, \cdot\right) \in B\right\} \cup \\ &\cup \left\{\frac{m-1}{2^n} \leqslant \tau \leqslant s,\ W\left(\frac{m-1}{2^n} \wedge t, \cdot\right) \in B\right\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

(при $m = 1$ имеем $\bigcup\limits_{\varnothing} = \varnothing$). Остается учесть, что $\left\{W\left(\frac{k-1}{2^n} \wedge t, \cdot\right) \in B\right\} \in$ $\in \mathcal{F}_{\leqslant \frac{k-1}{2^n}} \subset \mathcal{F}_{\leqslant s}$ для $k \leqslant m$, $\left\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau < \frac{k}{2^n}\right\} = \left\{\tau < \frac{k}{2^n}\right\} \setminus \left\{\tau < \frac{k-1}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_{\leqslant \frac{k}{2^n}} \subset \mathcal{F}_{\leqslant s}$ для $k \leqslant m-1$ и $\left\{\frac{m-1}{2^n} \leqslant \tau \leqslant s\right\} \in \mathcal{F}_{\leqslant s}$ ($\{\tau < u\} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} \left\{\tau \leqslant u - \frac{1}{q}\right\} \in \mathcal{F}_{\leqslant u}$ для $u > 0$; $\{\tau < 0\} = \varnothing$). □

Пользуясь доказательством леммы 4.6, взяв в ней $\mathcal{F}_\tau$ вместо $\mathcal{A}$, нетрудно получить, что $X(\cdot, \omega)$ есть $\mathcal{F}_\tau \,|\, \mathcal{B}(C_0[0,\infty))$-измеримый с.э.

Заметим, что с.в. $\tau \in \mathcal{F}_\tau \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, поскольку для всех $s, t \geqslant 0$ имеем $\{\tau \leqslant s\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{\leqslant s \wedge t} \subset \mathcal{F}_{\leqslant t}$.

Пользуясь доказанным и леммой 2.1, получаем, что $(\tau, X(\cdot, \omega))$ является $\mathcal{F}_\tau \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(C_0[0,\infty))$-измеримым с.э. По теореме 4.5 с.э. (τ, X) не зависит от броуновского движения Y. Следовательно, $P_{(\tau,X,Y)} = P_{(\tau,X)} \times P_Y = P_{(\tau,X)} \times \mathbb{W}$. Очевидно, $-Y$ также не зависит от $\mathcal{F}_\tau$, а т. к. $-Y$ снова является броуновским движением, то $P_{(\tau,X,-Y)} = P_{(\tau,X)} \times P_{-Y} = P_{(\tau,X)} \times \mathbb{W} = P_{(\tau,X,Y)}$, что и требовалось доказать. □

Обозначим

$$M(t,\omega) = \sup_{s \in [0,t]} W(s,\omega), \quad t \geqslant 0.$$

Легко видеть, что $M(t,\cdot)$ при каждом $t \geqslant 0$ есть действительная с.в., т.к.

$$G_t f = \sup_{s \in [0,t]} f(s), \quad f \in C_0[0,\infty), \tag{4.20}$$

есть непрерывное отображение $C_0[0,\infty)$ в $\mathbb{R}$.

Далее нам понадобится следующий результат.

Теорема 4.11 (закон нуля или единицы Колмогорова). *Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано семейство независимых с.э. $\{X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$ со значениями в измеримых пространствах, т.е. $X_t : \Omega \to \mathcal{X}_t$, $X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$, $t \in T$. Обозначим*

$$\mathcal{F}_{\geqslant t} = \sigma\{X_s,\ s \in T \cap [t,\infty)\}.$$

Тогда σ-алгебра $\mathcal{F}^\infty := \cap_{t \in T} \mathcal{F}_{\geqslant t}$ вырожденная, т.е. $P(A)$ равно нулю или единице для любого $A \in \mathcal{F}^\infty$ (если $T \cap [t,\infty) = \emptyset$, то $\mathcal{F}_{\geqslant t} := \emptyset$).

□ **Возьмем произвольное** $A \in \mathcal{F}^\infty$ **и покажем, что** A **не зависит от** A. Имеем $A \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$ при каждом $t \in T$. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу леммы 4.2 существует A_ε из **алгебры**, порождающей $\mathcal{F}_{\geqslant t}$, т.е. A_ε вида $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \in B\}$, где $B \in \mathcal{B}(t_1, \ldots, t_n)$, $t \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ (все точки из T), $n \in \mathbb{N}$, такое, что $P(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ (мы учли также рассуждения перед теоремой 4.1 и лемму 2.5). Следовательно,

$$|C(A,A) - C(A,A_\varepsilon)| \leqslant 2P(A \triangle A_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

где $C(A,D) = P(AD) - P(A)P(D)$ для событий A и D. Снова по лемме 4.2 замечаем, что σ-алгебры $\mathcal{B}(t_1, \ldots, t_n)$ и $\mathcal{F}_{\geqslant t}$ независимы при $t > t_n$. Поэтому независимы события A и A_ε, т.е. $C(A, A_\varepsilon) = 0$. Таким образом, $C(A,A) = P(A) - P(A)^2 = 0$ (бралось произвольное положительное ε). □

Лемма 4.12. *Пусть $a > 0$. Тогда $\tau_a(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 : W(t,\omega) = a\}$ – момент остановки (относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$).*

□ Из теоремы 4.2 следует, что τ_a – марковский момент. **Докажем, что** $\tau_a(\omega) < \infty$ п.н. Для $a > 0$ имеем

$$P(\tau_a < \infty) \geqslant P(\sup_{t\in[0,\infty)} W(t) > a) \geqslant P(W(n) > a\sqrt{n} \text{ б.ч.}) \geqslant$$

$$\geqslant P(\limsup_{n\to\infty} n^{-1/2}W(n) > a) \geqslant \limsup_{n\to\infty} P(n^{-1/2}W(n) > a) = P(\xi > a) > 0, \qquad (4.21)$$

здесь $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и "б.ч." означает бесконечно часто (по n). Мы воспользовались тем, что для действительных с.в. Y_n, $n \in \mathbb{N}$ и константы $c \in \mathbb{R}$

$$P(\limsup_{n\to\infty} Y_n > c) = P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m\geqslant n} \{Y_m > c\}) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{m\geqslant n}\{Y_m > c\})$$

и $P(\cup_{m\geqslant n}\{Y_m > c\}) \geqslant P(Y_n > c)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, откуда

$$P(\limsup_{n\to\infty} Y_n > c) \geqslant \limsup_{n\to\infty} P(Y_n > c).$$

Теперь заметим, что для $c \in \mathbb{R}$ имеем

$$\{W(n)/\sqrt{n} > c \text{ б.ч.}\} \equiv \{\sum_{k=1}^{n} X_k/\sqrt{n} > c \text{ б.ч.}\} \in \mathcal{F}^{\infty},$$

где σ-алгебра $\mathcal{F}^{\infty}$ строится по последовательности независимых величин

$$X_k = W(k) - W(k-1),\ k \in \mathbb{N}.$$

Действительно,

$$\{\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X_k/\sqrt{n} > c\} \equiv \{\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} X_k/\sqrt{n} > c\} \in \mathcal{F}_{\geqslant m}$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$. По закону нуля или единицы имеем

$$P\{\limsup_{n\to\infty} W(n)/\sqrt{n} > c\} \in \{0,1\}.$$

Из (4.21) вытекает, что эта вероятность (а значит и $P(\tau_a < \infty)$) равна 1. □

Теорема 4.13. *При всех* $t, x, y \geqslant 0$ *верно равенство*

$$P(W(t) < y - x,\ M(t) \geqslant y) = P(W(t) > y + x). \qquad (4.22)$$

□ Если $y = 0$, (4.22) превращается в тривиальное равенство $P(W(t) < -x) = P(W(t) > x)$. Пусть $y > 0$. По лемме 4.12 $\tau_y = \inf\{s \geqslant 0\colon\ W(s,\omega) = y\}$ есть момент остановки относительно потока $\mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{W(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Пусть процесс $Z(t,\omega)$ определяется формулой (4.18) с величиной $\tau = \tau_y$. Очевидно, $\sigma_y(\omega) = \inf\{s \geqslant 0\colon\ Z(s,\omega) = y\}$ есть также момент остановки относительно фильтрации $\mathcal{F}_{\leqslant t}^{(Z)} = \sigma\{Z(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, при этом $\sigma_y(\omega) \equiv \tau_y(\omega)$ для всех $y \geqslant 0$.

Заметим, что $\{\tau_y \leqslant t\} = \{M(t) \geqslant y\}$ для любых $t, y \geqslant 0$. Поэтому для всех $B \in \mathcal{B}(C[0,\infty))$, $t \geqslant 0$

$$P(\tau_y \leqslant t,\ W(\cdot) \in B) = P(\sup_{s\in[0,t]} W(s) \geqslant y,\ W(\cdot) \in B) = P(W(\cdot) \in \tilde{B} \cap B),$$

где $\tilde{B} = G_t^{-1}([y, \infty)) \in \mathcal{B}(C[0,\infty))$, см. (4.20). Применив теорему 4.8, видим, что

$$P(\sigma_y \leqslant t,\ Z(\cdot) \in B) = P(Z(\cdot) \in \tilde{B} \cap B) = P(W(\cdot) \in \tilde{B} \cap B).$$

Итак, с.э. (τ_y, W) и (σ_y, Z) имеют одинаковые распределения.

Следовательно, для всех $x \in \mathbb{R}$, $t, y \geqslant 0$

$$P(\sigma_y \leqslant t,\ Z(t) < y - x) = P(\tau_y \leqslant t,\ W(t) < y - x). \tag{4.23}$$

В силу непрерывности W имеем $W(\tau_y(\omega), \omega) = y$ при $y \geqslant 0$, $\omega \in \Omega_\tau$. Поэтому для $t \geqslant \sigma_y(\omega)$ получаем $Z(t,\omega) = 2W(\tau_y(\omega),\omega) - W(t,\omega) = 2y - W(t,\omega)$. Таким образом, при всех $y \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$ из (4.23) имеем

$$\begin{aligned} P(M(t) \geqslant y,\ W(t) < y - x) &= P(\sigma_y \leqslant t,\ Z(t) < y - x) = \\ &= P(\sigma_y \leqslant t,\ W(t) > y + x) = P(\tau_y \leqslant t,\ W(t) > y + x) = \\ &= P(M(t) \geqslant y,\ W(t) > y + x). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Если $x \geqslant 0$, то $P(M(t) \geqslant y,\ W(t) > y + x) = P(W(t) > y + x)$ и (4.24) влечет (4.22). $\square$

Следствие 4.14. *При всех* $t, y \geqslant 0$

$$P(M(t) \geqslant y) = 2P(W(t) \geqslant y). \tag{4.25}$$

$\square$ Возьмем $x = 0$ в формуле (4.22). Тогда

$$\begin{aligned} &P(W(t) < y,\ M(t) \geqslant y) = P(W(t) > y), \\ &P(M(t) \geqslant y) = P(M(t) \geqslant y,\ W(t) < y) + P(M(t) \geqslant y,\ W(t) \geqslant y) = \\ &\quad = P(W(t) > y) + P(W(t) \geqslant y) = 2P(W(t) \geqslant y) \end{aligned}$$

(учли, что $P(W(t) = y) = 0$ при любых $y \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$). $\square$

Заметим, что распределение $M(t)$ находится с помощью других методов в дополнении к лекции 6.

Следствие 4.15. *Для всех* $y \geqslant 0$ *и* $0 \leqslant a < b < \infty$

$$P(\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |W(t) - W(a)| \geqslant y) \leqslant 4P(W(b-a) \geqslant y) \equiv 2P(|W(b-a)| \geqslant y). \tag{4.26}$$

$\square$ В силу теоремы 4.3

$$\begin{aligned} P(\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |W(t) - W(a)| \geqslant y) &= P(\sup_{0 \leqslant s \leqslant b-a} |W(s)| \geqslant y) \leqslant \\ &\leqslant P(\sup_{0 \leqslant s \leqslant b-a} W(s) \geqslant y) + P(\inf_{0 \leqslant s \leqslant b-a} W(s) \leqslant -y). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sup_{s \in [0,t]} (-W(s)) = -\inf_{s \in [0,t]} W(s)$ для всех $t \geqslant 0$ и что $-W$ есть броуновское движение, остается воспользоваться неравенством (4.25). $\square$

Для $t \geqslant 0$ обозначим $\operatorname{Log} t = \ln(t \vee e)$. Оценка (4.26) играет важную роль при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 4.16 (закон повторного логарифма). *С вероятностью единица*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{W(t)}{(2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{1/2}} = 1, \tag{4.27}$$

и

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{W(t)}{(2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{1/2}} = -1. \tag{4.28}$$

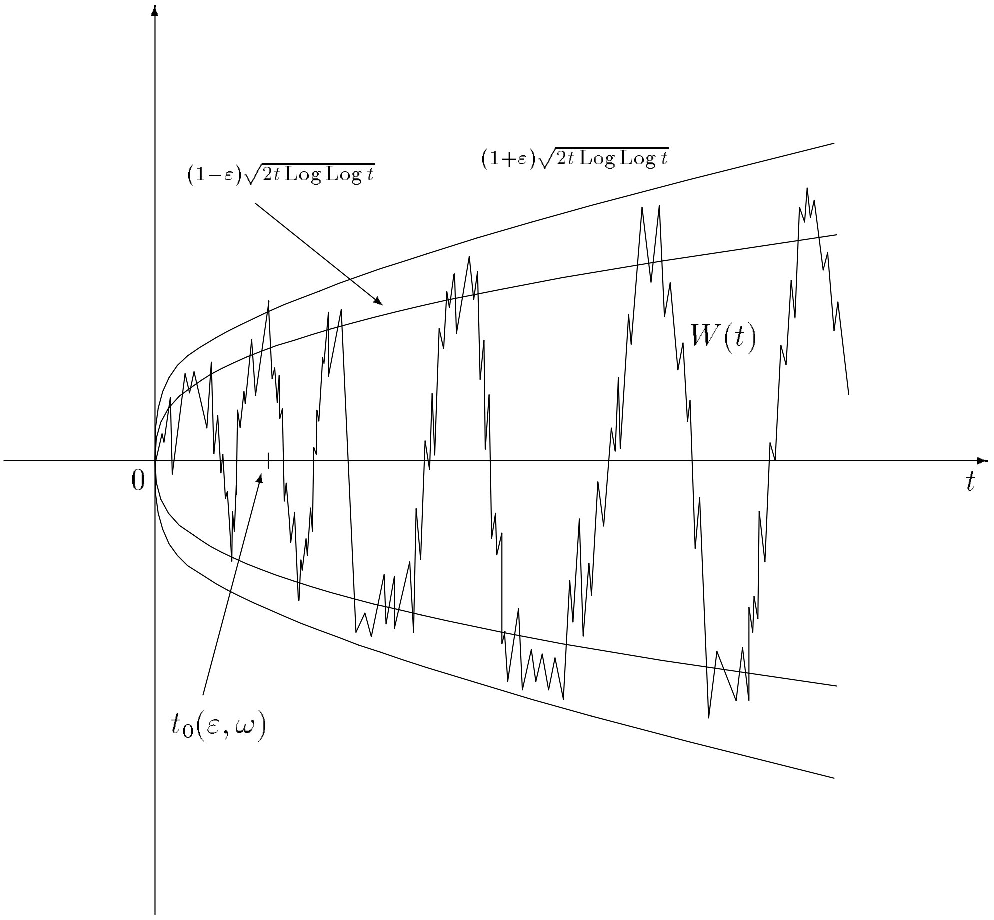

Рис. 5.2

Теорема 4.16 показывает, что почти все траектории винеровского процесса остаются внутри расширяющейся «трубы» между кривыми $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2t\,\mathrm{Log\,Log}\,t}$ (для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $t_0(\varepsilon,\omega)$). В то же время с вероятностью 1 они бесконечно часто «выскакивают» из «трубы» с границей $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2t\,\mathrm{Log\,Log}\,t}$ (см. рис. 5.2). Доказательство этого результата (и локального закона повторного логарифма) отнесено в приложение 3, кроме того, в дополнении к этой лекции доказывается более общая теорема Штрассена.

Нам понадобится еще один процесс, связанный с броуновским движением. *Броуновским мостом* называется процесс

$$W_0(t) = W(t) - tW(1), \quad t \in [0,1]. \tag{4.29}$$

Название обусловлено тем обстоятельством, что $W_0(0) = W_0(1) = 0$, как видно из определения (4.29).

Дополнения и упражнения.

Упр. 4.1. Пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 4.1, докажите, что винеровский процесс $\{W(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ п.н. имеет траектории, не удовлетворяющие ни в одной точке условию Гельдера с показателем $\gamma > 1/2$ (см. упр. 3.8 и **??**).

Упр. 4.2. Получите результат упражнения 3.8 из теоремы Д2.24 и того, что (проверьте) для $q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant s < t < \infty$

$$\mathsf{E}(W(t) - W(s))^{2q} = (2q-1)!!(t-s)^q. \tag{4.30}$$

Обозначим $H_\gamma(\omega)$ для $\omega \in \Omega$ (можем считать, $\Omega = C[0,\infty)$) множество тех точек $t \in [0,\infty)$, в которых траектория винеровского процесса удовлетворяет условию Гельдера с показателем γ. Упражнения 3.8, 4.2 показывают, что $P(H_\gamma = [0,\infty)) = 1$ для $\gamma < 1/2$. Упражнение 4.1 показывает, что $P(H_\gamma = \emptyset) = 1$ при $\gamma > 1/2$. Из упражнения **??** следует, что $P(t \in H_{1/2}) = 0$ для каждого $t \geqslant 0$. Однако Дэвис [?] в 1983 г. показал, что $P(H_{1/2} \neq \emptyset) = 1$.

Теперь мы покажем, что **исследование сумм независимых действительных случайных величин (с конечной дисперсии) в определенном смысле сводится к изучению поведения броуновского движения в случайные моменты времени**. Эта глубокая идея принадлежит А. В. Скороходу (см. [?]).

Теорема Д4.3. *Пусть X – действительная с.в., имеющая $\mathsf{E}|X| < \infty$. Тогда существуют (на некотором вероятностном пространстве) броуновское движение $W(t)$, $t \geqslant 0$, и с.в. τ такие, что*

$$X \overset{\mathcal{D}}{=} \mathsf{E}X + W(\tau). \tag{4.31}$$

Если $\mathsf{E}X^2 < \infty$, то при этом существует $\mathsf{E}\tau$ и

$$\mathsf{E}\tau = \mathsf{D}X. \tag{4.32}$$

□ Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы X и броуновское движение $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ (всегда можем расширить исходное вероятностное пространство). Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathsf{E}X = 0$ и X – невырожденная величина (иначе берется $\tau \equiv 0$). Пусть сначала X принимает два значения a и b ($a < 0 < b$, поскольку $\mathsf{E}X = 0$). Если

$$P(X = a) = p, \quad P(X = b) = 1 - p, \tag{4.33}$$

то условие $\mathsf{E}X = 0$ влечет

$$p = \frac{b}{b-a}, \quad 1 - p = \frac{-a}{b-a}. \tag{4.34}$$

В силу теоремы 4.4 величина

$$\tau_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : \, W(t) \in \{a, b\}\}$$

есть марковский момент относительно естественной фильтрации винеровского процесса.

Докажем, что $\tau_{a,b}$ есть момент остановки, т.е. $\tau_{a,b} < \infty$ п.н. (это легко получить из леммы 4.12). Более того, покажем, что $\mathsf{E}\tau_{a,b}^k < \infty$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{\tau_{a,b} \geqslant m\} \subset \{|W(n) - W(n-1)| \leqslant b - a,\ n = 1, \dots, m\}.$$

$$P(|W(n) - W(n-1)| \leqslant b - a,\ n = 1, \dots, m) = P(|\xi| \leqslant b - a)^m,$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Поэтому (поясните)

$$P(\tau_{a,b} = \infty) = 0 \text{ и } \mathsf{E}\tau_{a,b}^k < \infty \ (k, \in \mathbb{N}). \tag{4.35}$$

Учитывая непрерывность броуновского движения, получаем: $W(\tau_{a,b}) = a$ или $W(\tau_{a,b}) = b$ (с вероятностью 1). Из (4.35), имеем

$$P(W(\tau_{a,b}) = a) = p_{a,b},\ P(W(\tau_{a,b}) = b) = 1 - p_{a,b}. \tag{4.36}$$

Докажем, что

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}) = 0, \tag{4.37}$$

тогда из (4.36) найдем, что $p_{a,b} = b/(b-a)$ и, согласно (4.33), (4.34), для двузначных величин X соотношение (4.31) будет установлено.

Воспользуемся **первым тождеством Вальда**: пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ н.о.р. величины и τ – марковский момент (со значениями в $\mathbb{N}$) относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, причем $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$ и $\mathsf{E}\tau < \infty$. Тогда

$$\mathsf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_\tau) = \mathsf{E}\tau\mathsf{E}\xi_1. \tag{4.38}$$

Действительно,

$$\mathsf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_\tau| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(|\xi_1 + \ldots + \xi_\tau|\mathbb{I}(\tau = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(|\xi_1 + \ldots + \xi_n|\mathbb{I}(\tau = n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(\mathsf{E}(|\xi_1 + \ldots + \xi_n|\mathbb{I}(\tau = n)|\mathcal{F}_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(\mathbb{I}(\tau = n)\mathsf{E}(|\xi_1 + \ldots + \xi_n|\,|\mathcal{F}_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n)\mathsf{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau = n)\mathsf{E}|\xi_1| = \mathsf{E}\tau\mathsf{E}|\xi_1|. \tag{4.39}$$

Мы воспользовались свойствами условного математического ожидания, известными из общего курса теории вероятностей (см., напр., [?]). В приведенных выше рассуждениях мы сознательно не опирались на неизлагавшуюся еще теорию мартингалов. Аналогичная (4.39) выкладка (без модуля) дает справедливость (4.38).

Упр. 4.4. Докажите **второе тождество Вальда**. А именно, если к условиям, обеспечивающим (4.38), добавить требование $\mathsf{D}\xi_1 < \infty$, то

$$\mathsf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_\tau - \tau\mathsf{E}\xi_1)^2 = \mathsf{E}\tau\mathsf{D}\xi_1. \tag{4.40}$$

Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим величины $\xi_{n,m} = W(m/n) - W((m-1)/n)$, $m \in \mathbb{N}$ и положим

$$\tau_{a,b}^{(n)} = \inf\{m:\ \xi_{n,1} + \ldots + \xi_{n,m} \notin (a,b)\}. \tag{4.41}$$

Упр. 4.5. Докажите, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\tau_{a,b}^{(n)}$ – марковский момент относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_k^{(n)} = \sigma\{\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,k}\}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\mathsf{E}\tau_{a,b}^{(n)} < \infty$.

Из этого упражнения, (4.35) и (4.38), заметив, что $\xi_{n,1} + \ldots + \xi_{n,\tau_{a,b}^{(n)}} = W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)$ и $\mathsf{E}\xi_{n,1} = 0$, получаем

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}^{(n)}/n) = 0. \tag{4.42}$$

Упр. 4.6. Учитывая непрерывность винеровского процесса, докажите, что

$$\tau_{a,b}^{(n)}/n \to \tau_{a,b} \ \text{ п.н. при } \ n \to \infty. \tag{4.43}$$

Из упражнения 4.6 выведем, что

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}^{(n)}/n) \to \mathsf{E}(W\tau_{a,b}),\ n \to \infty. \tag{4.44}$$

Для этого напомним, что семейство действительных с.в. $\{\xi_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\alpha\in\Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha|\geqslant c\}} |\xi_\alpha| dP = 0. \tag{4.45}$$

Известно (см., напр., [**?**, с. ??]), что если $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ (сходятся по распределению) и $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi,\ n \to \infty \tag{4.46}$$

(более того, если $\xi_n \geqslant 0$, то условие (4.45) является необходимым для (4.46)). Очевидно сходимость п.н. влечет сходимость по распределению.

Упр. 4.7. Докажите, что условие

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \mathsf{E}|\xi_\alpha|^\gamma < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \gamma > 1$$

влечет равномерную интегрируемость величин $\{\xi_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$.

Упр. 4.8. С помощью (4.35), предыдущего упражнения и того обстоятельства, что

$$|W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)| \leqslant b + a + |\xi_{n,\tau_{a,b}^{(n)}}|,$$

докажите, что последовательность $\{W(\tau_{a,b}^{(n)}/n),\ n \in \mathbb{N}\}$ является равномерно интегрируемой.

Учитывая (4.43), непрерывность броуновского движения и упражнение 4.8, получаем (4.44). В силу (4.42) приходим к (4.37). Таким образом, для центрированных двузначных величин вида (4.33) доказано, что

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} W(\tau_{a,b}). \tag{4.47}$$

Рассмотрим теперь **общий случай**. Обозначим $F(x) = P(X \leqslant x)$. Учитывая, что $\mathsf{E}X = 0$ и то, что с.в. X невырождена, имеем

$$c = \int_{(-\infty,0]} (-y)dF(y) = \int_{(0,\infty)} zdF(z) \neq 0. \tag{4.48}$$

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная и ограниченная функция. Тогда

$$c\mathsf{E}f(X) = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) = \int_{(0,\infty)} f(z)dF(z) \int_{(-\infty,0]} (-y)dF(y) +$$

$$+ \int_{(-\infty,0]} f(y)dF(y) \int_{(0,\infty)} zdF(z) = \int_{(0,\infty)} dF(z) \int_{(-\infty,0]} dF(y)(zf(y) - yf(z)). \tag{4.49}$$

Отсюда

$$\mathsf{E}f(X) = c^{-1} \int_{(0,\infty)} dF(z) \int_{(-\infty,0]} dF(y)(z-y)\left\{ f(y)\frac{z}{z-y} + f(z)\frac{-y}{z-y} \right\}. \tag{4.50}$$

На $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ построим случайный вектор (Y, Z) со значениями в $\mathbb{R}^2$ такой, что

$$P'((Y,Z) \in B) = c^{-1} \int\int_{B\cap\{(-\infty,0]\times(0,\infty)\}} (z-y)dF(z)dF(y). \tag{4.51}$$

Легко видеть, что правая часть формулы (4.51) есть неотрицательная счетно аддитивная функция. То, что это вероятностная мера, сразу следует из формулы (4.50), в которой полагаем $f \equiv 1$.

Для $y < 0 < z$, в силу (4.36), где $p_{y,z} = z/(z-y)$ и согласно (4.47) имеем

$$f(y)\frac{z}{z-y} + f(z)\frac{(-y)}{z-y} = \mathsf{E}f(W(\tau_{y,z})). \tag{4.52}$$

Эта формула будет верна и для $y \leqslant 0 < z$, если положить $\tau_{0,b} = 0$ при $b > 0$. Рассмотрим теперь

$$(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P').$$

Тогда, учитывая (4.51), (4.52), (4.37) и формулу (2.10), равенство (4.50) можем переписать в виде

$$\mathsf{E}f(X) = \widetilde{\mathsf{E}}f(X) = \mathsf{E}'\mathsf{E}f(X) = \mathsf{E}'\mathsf{E}f(W(\tau_{Y,Z})) = \widetilde{\mathsf{E}}f(W(\tau_{Y,Z})), \tag{4.53}$$

здесь E' означает интегрирование по мере P', а $\widetilde{\mathsf{E}}$ – по мере $\widetilde{P} = P \times P'$. Поэтому в силу упражнения 2.9 имеем

$$\widetilde{P}_X = \widetilde{P}_{W(\tau_{Y,Z})}. \tag{4.54}$$

Для завершения доказательства соотношения (4.31) заметим (поясните), что $\widetilde{W}(t, \widetilde{\omega}) := W(t, \omega)$, где $t \geqslant 0$ и $\widetilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \widetilde{\Omega}$, будет броуновским движением, заданным на пространстве $(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P})$. Далее считаем, что $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ есть расширенное пространство и E обозначает интегрирование по мере P.

Упр. 4.9. Используя второе тождество Вальда (упражнение 4.4), докажите, что

$$\mathsf{E}\tau_{a,b} = -ab. \tag{4.55}$$

Пусть теперь $\mathsf{E}X^2 < \infty$.

Воспользовавшись (4.55) и теоремой Фубини, получаем

$$\widetilde{\mathsf{E}}\tau_{Y,Z} = \mathsf{E}'\mathsf{E}(\tau_{Y,Z}) = \mathsf{E}'(-YZ). \tag{4.56}$$

Принимая во внимание (4.56), (4.51) и (4.48), имеем

$$\widetilde{\mathsf{E}}\tau_{Y,Z} = \mathsf{E}(-YZ) = \int_{(-\infty,0]} dF(y)(-y) \int_{(0,\infty)} dF(z)z(z-y)c^{-1} =$$

$$= \int_{(-\infty,0]} dF(y)(-y)\left\{-y + \int_{(0,\infty)} dF(z)c^{-1}z^2\right\} =$$

$$= \int_{(-\infty,0]} y^2 dF(y) + \int_{(0,\infty)} z^2 dF(z) = \mathsf{E}X^2 = \widetilde{\mathsf{E}}X^2. \ \square$$

Теорема Д4.10 (Скороход, [?]). *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность центрированных независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве. Тогда это пространство можно расширить так, что на нем найдется последовательность с.в. T_k, $k \in \mathbb{N}$ и броуновское движение $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ такие, что*

$$\{X_k,\, k \in \mathbb{N}\} \overset{\mathcal{D}}{=} \{W(T_k) - W(T_{k-1}),\, k \in \mathbb{N}\}, \tag{4.57}$$

где неотрицательные величины $T_k - T_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ ($T_0 \equiv 0$) независимы, а если $\mathsf{E}X_k^2 < \infty$, то $\mathsf{E}(T_k - T_{k-1}) = \mathsf{E}X_k^2$.

□ Доказательство основано на теореме Д4.3. Пусть F_k обозначает ф.р. величины X_k ($k \in \mathbb{N}$). Построим на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ последовательность независимых векторов (Y_k, Z_k), $k \in \mathbb{N}$, таких, что распределение (Y_k, Z_k) определяется согласно (4.51), где вместо F берется F_k. Пусть на рассматриваемом вероятностном пространстве независимы $\{(Y_k, Z_k),\, k \in \mathbb{N}\}$ и $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$. Положим

$$T_k = \inf\{t \geqslant T_{k-1} :\ W(t + T_{k-1}) - W(T_{k-1}) \notin (Y_k, Z_k)\},\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.58}$$

В (4.58) (Y_k, Z_k) обозначает не вектор, а интервал с левым концом Y_k и правым Z_k. Тогда $\{T_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ – искомая случайная последовательность. □

Пусть $W(t) = (W^{(1)}(t), \ldots, W^{(q)}(t))$ есть q-**мерное броуновское движение** (т.е. компоненты $W^{(j)}(t)$, $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, q$, являются независимыми стандартными броуновскими движениями, иначе говоря, имеется q независимых с.э. со значениями в $C[0, \infty)$). Введем в пространстве $(C[0,1])^q$ метрику, задаваемую нормой

$$\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathcal{R}^q$. Определим семейство случайных функций

$$g_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{2n \mathrm{Log\,Log} n}},\ t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}, \tag{4.59}$$

где $\mathrm{Log} z = (\log z) \vee 1$ при $z > 0$ и $\mathrm{Log\,Log} z = \mathrm{Log}(\mathrm{Log} z)$ (если брать обычные натуральные логарифмы, то в (4.59) надо добавлять, что $n \geqslant 3$).

Теорема Д4.11 (функциональный закон повторного логарифма, Штра-ссен). *Множество предельных точек последовательности $\{g_n\}$ в $(C[0,1])^q$ с введенной метрикой, п.н. совпадает со множеством*

$$K = \{x :\, x(t) = \int_0^t h(s)ds,\ s \in [0,1]\ \text{и}\ \int_0^1 |h(s)|^2 ds \leqslant 1\},$$

где $\int_0^t h(s)ds = (\int_0^t h^{(1)}(s)ds \ldots \int_0^t h^{(q)}(s)ds)$. Другими словами, K состоит из абсолютно непрерывных функций x таких, что $x^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, q$ и

$$\int_0^1 |dx/dt|^2 ds \leqslant 1,$$

где $dx/dt = (dx^{(1)}/dt, \ldots, dx^{(q)}/dt)$.

Замечание Д4.12. Теорема Д4.11 сохранится (проверьте самостоятельно, прочитав ниже ее доказательство) и для семейства функций

$$g_T(t) = \frac{W(Tt)}{\sqrt{2T\mathrm{Log\,Log}T}},\ T > 0,\ t \in [0,1],$$

индексированных непрерывным параметром T, если иметь в виду множество предельных точек для $g_{T_n}(\cdot)$, где $\{T_n\}$ – любая такая последовательность, что $T_n > 0$ и $T_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Упр. 4.13. Докажите, что множество K ("шар Штрассена") – компакт в $(C[0,1])^q$.

Упр. 4.14. Пусть $\mathcal{C}(\{x_n\})$ – множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$ в метрическом пространстве $(\mathcal{X},\rho)$. Пусть h – непрерывное отображение $\mathcal{X}$ в метрическое пространство $(\mathcal{Y},\delta)$. Докажите, что $\mathcal{C}(\{hx_n\}) = h(\mathcal{C}(\{x_n\}))$.

Возьмем функционал

$$h(x(\cdot)) = x^{(1)}(1),\ x \in (C[0,1])^q.$$

Тогда теорема Д4.11 и упражнение 4.14 приводят (объясните подробно) к следующему обобщению теоремы 4.16.

Следствие Д4.15. *Пусть $W(t)$ – стандартное одномерное броуновское движение. Тогда для любой последовательности $\{t_n\}$, такой что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, множество предельных точек семейства $\{W(t_n)/\sqrt{2t_n\mathrm{Log\,Log}t_n},\ n \in \mathbb{N}\}$ с вероятностью 1 совпадает с отрезком $[-1,1]$, т.е. с "шаром" на прямой.*

□ Докажем теорему 4.11. Легко видеть, что **утверждение** "$\mathcal{C}(\{g_n\}) = K$ п.н." **равносильно одновременному выполнению следующих двух соотношений**:

1) для любого $\varepsilon > 0$

$$P(g_n \notin K^\varepsilon \text{ б.ч.}) = 0, \tag{4.60}$$

здесь B^ε – это ε-окрестность множества B в равномерной метрике, а "б.ч." означает бесконечно часто ($\{A_n \text{ б.ч.}\} = \cap_n \cup_{j\geqslant n} A_j$),

2) для любой функции $x \in K$ и любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1

$$g_{n_k}(\cdot,\omega) \in \{x\}^\varepsilon \text{ при } k \geqslant N, \tag{4.61}$$

где $\{n_k\}$ и N зависят от ε, x и элементарного исхода ω.

Итак, **зададимся произвольным** $\varepsilon > 0$ **и будем оценивать** $P(g_n \notin K^\varepsilon)$ **при больших** n. Разобьем отрезок $[0,1]$ точками i/m, $i = 0,1,\ldots,m$, где m выберем позднее. Функции $g \in (C[0,1])^q$ сопоставим непрерывную (векторную) ломаную $\widehat{g}$ в $(C[0,1])^q$, имеющую узлы $(i/m, g(i/m))$, $i = 0,1,\ldots,m$. Для любого $r > 1$ имеем

$$P(g_n \notin K^\varepsilon) \leqslant P(r^{-1}\widehat{g}_n \notin K) + P(r^{-1}\widehat{g}_n \in K,\ \|g_n - r^{-1}\widehat{g}_n\| > \varepsilon) =: p_1 + p_2. \tag{4.62}$$

Далее,

$$p_1 = P(r^{-1}\widehat{g}_n \notin K) = P(\int_0^1 \left|\frac{1}{r}\frac{d\widehat{g}}{dt}\right|^2 dt > 1) = P(\chi^2_{md} > 2r^2\mathrm{Log\,Log}n),$$

поскольку

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{r}\frac{d\widehat{g}}{dt}\right|^2 dt = q\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\Big(g_n^{(j)}(i/m) - g_n^{(j)}((i-1)/m)\Big)^2 = (2\mathrm{Log\,Log}n)^{-1}\chi^2_{md},$$

здесь $g_n(t) = (g_n^{(1)}(t), \dots, g_n^{(q)}(t))$, χ^2_d – случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с d ($d \in \mathbb{N}$) степенями свободы. Напомним, что плотность χ^2_d задается формулой

$$p_{\chi^2_d}(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{d/2-1}e^{-z/2}}{2^{d/2}\Gamma(d/2)}, & z \geqslant 0,\\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ для $\alpha > 0$. Поэтому (один раз проинтегрировав по частям) получаем

$$P(\chi^2_d > x) \sim \frac{x^{d/2-1}e^{-x/2}}{2^{d/2-1}\Gamma(d/2)} \text{ при } x \to \infty.$$

Следовательно, для некоторого c_1 (всюду через c с индексом обозначаем положительные постоянные, не зависящие от n) и всех n

$$p_1 \leqslant c_1 \exp\{-r\mathrm{Log\,Log}n\}. \tag{4.63}$$

Далее,

$$p_2 \leqslant P(r^{-1}\widehat{g}_n \in K,\ (1-r^{-1})\|r^{-1}\widehat{g}_n\| > \varepsilon/2) + P(\|g_n - \widehat{g}_n\| > \varepsilon/2). \tag{4.64}$$

Взяв $r = r(\varepsilon)$ достаточно близким к 1, получим, что при всех n

$$P(r^{-1}\widehat{g}_n \in K,\ (1-r^{-1})\|r^{-1}\widehat{g}_n\| > \varepsilon/2) = 0, \tag{4.65}$$

поскольку для $r^{-1}\widehat{g}_n \in K$ имеем $\|\widehat{g}_n\| \leqslant r$. Действительно, если $x(\cdot) \in K$, то для $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

$$|x(t) - x(s)| = \left|\int_s^t \frac{dx}{du}du\right| \leqslant (t-s)^{1/2}\left(\int_s^t \left|\frac{dx}{du}\right|du\right)^{1/2} \leqslant (t-s)^{1/2},$$

здесь $\int_s^t \frac{dx}{du}du = (\int_s^t \frac{dx^{(1)}}{du}du, \dots, \int_s^t \frac{dx^{(q)}}{du}du)$. Записывая цепочку неравенств и применяя следствие 4.15, получаем

$$P(\|g_n - \widehat{g}_n\| > \varepsilon/2) \leqslant \sum_{i=1}^{m} P(\sup_{t\in[(i-1)/m, i/m]} |g_n(t) - g_n((i-1)/m)| > \varepsilon/4) \leqslant$$

$$\leqslant q\sum_{i=1}^{m} P(\sup_{t\in[(i-1)/m, i/m]} |w(t) - w((i-1)/m)| > (\varepsilon/4)\sqrt{m/q}\sqrt{2\mathrm{Log\,Log}n}) \leqslant$$

$$\leqslant qmc_2\exp\{-\mathrm{Log\,Log}n\}\varepsilon^2 m/(16q)\} \leqslant c_3\exp\{-r\mathrm{Log\,Log}n\}, \tag{4.66}$$

где w – одномерное броуновское движение и выбрано $m > 16qr\varepsilon^{-2}$, а также учтено, что

$$\{y \in \mathbb{R}^q:\ |y| > \varepsilon\} \subset \{y \in \mathbb{R}^q:\ \max_{1\leqslant i\leqslant q}|y_i| > \varepsilon/\sqrt{q}\}. \tag{4.67}$$

Таким образом, для любого $c > 1$, **обозначив** $n_k = [c^k]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа, имеем в силу (4.62) – (4.66)

$$\sum_k P(g_{n_k} \notin K^\varepsilon) \leqslant c_4 \sum_k \exp\{-r \mathrm{Log\,Log} n_k\} < \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля – Кантелли $g_{n_k} \in K^\varepsilon$ **для п.в.** ω **и** $k > N(\varepsilon, c, \omega)$.

Рассмотрим теперь g_n **при** $n \in [n_k,\, n_{k+1}]$. Учитывая (4.67), имеем

$$P(\max_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} \|g_n - g_{n_k}\| > \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant qP\left(\max_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} \left\| \frac{w(n\cdot)}{\sqrt{2n \mathrm{Log\,Log} n}} - \frac{w(n_k\cdot)}{\sqrt{2n_k \mathrm{Log\,Log} n_k}} \right\| > \varepsilon/\sqrt{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant qP\left(\max_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} \frac{\|w(n\cdot) - w(n_k\cdot)\|}{\sqrt{2n \mathrm{Log\,Log} n}} > \varepsilon/(2\sqrt{q})\right) +$$

$$qP\left(\max_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} \left|(2n \mathrm{Log\,Log} n)^{-1/2} - (2n_k \mathrm{Log\,Log} n_k)^{-1/2}\right| \|w(n_k\cdot)\| > \varepsilon/(2\sqrt{q})\right) \leqslant$$

$$\leqslant qP\left(\sup_{s,t \in [0, n_{k+1}], |s-t| \leqslant n_{k+1} - n_k} |w(s) - w(t)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{q}} \sqrt{2n_k \mathrm{Log\,Log} n_k}\right) +$$

$$+qP\left(\sup_{t \in [0, n_k]} |w(t)| > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{q}} ((2n_k \mathrm{Log\,Log} n_k)^{-1/2} - (2n_{k+1} \mathrm{Log\,Log} n_{k+1})^{-1/2})\right) =: q(p_3 + p_4). \tag{4.68}$$

Теперь нам понадобится оценка, которую легко получить из следствия 4.15.

Упр. 4.16. Для всех $y \geqslant 0$, $0 \leqslant a < b < \infty$ и $\delta \leqslant b - a$

$$P\left(\sup_{s,t \in [a,b], |s-t| \leqslant \delta} |w(s) - w(t)| > y\sqrt{\delta}\right) \leqslant \frac{c_0(b-a)}{\delta y} e^{-y^2/16}.$$

Из (4.68) и упражнения 4.16 получаем, выбрав c достаточно близким к 1, что при некотором $\gamma = \gamma(c) > 1$ и всех $k \in \mathbb{N}$

$$p_i \leqslant c_5 \exp\{-\gamma \mathrm{Log\,Log} n_k\}, \ i = 3, 4.$$

Снова применяя лемму Бореля – Кантелли, видим, что $g_n \in K^{2\varepsilon}$ для п.в. ω и всех $n \geqslant N(\varepsilon, \omega)$. Остается учесть, что $\varepsilon > 0$ бралось произвольным. **Итак,** (4.60) **установлено**.

Докажем (4.61).

Упр. 4.17. Объясните, почему для доказательства (4.61) достаточно убедиться, что для любой функции $x \in K$ такой, что

$$\int_0^1 \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt = a^2 < 1, \tag{4.69}$$

будет справедливо соотношение $P(g_n \in \{x\}^\varepsilon \text{ б.ч.}) = 1$.

Заметим, что

$$\{g_n \in \{x\}^\varepsilon\} = \{\|g_n - x\| < \varepsilon\} \supset \{\max_{1\leqslant i\leqslant m} |g_n(i/m) - x(i/m)| +$$

$$+ \sup_{s,t\in[0,1],|s-t|\leqslant 1/m} |x(t) - x(s)| + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{s\in[(i-1)/m,i/m]} |g_n(s) - g_n(i/m)| < \varepsilon\}.$$

Псколько для выбранной функции x (см. (4.69))

$$\sup_{s,t\in[0,1],|s-t|\leqslant 1/m} |x(t) - x(s)| \leqslant a/\sqrt{m},$$

то достаточно показать, что с вероятностью 1 произойдет бесконечное число событий

$$B_n = \{\max_{1\leqslant i\leqslant m} |g_n(i/m) - g_n((i-1)/m) - (x(i/m) - x((i-1)/m))| < \varepsilon/(8m)\}.$$

Мы учли также, что $g_n \in K^{\varepsilon'}$ при любом $\varepsilon' > 0$ для п.в. ω (такие ω мы и рассматриваем) и $n \geqslant N(\varepsilon', \omega)$, поэтому

$$|g_n(t) - g_n(s)| \leqslant \sqrt{|t-s|} + 2\varepsilon',\ \ s,t \in [0,1]. \tag{4.70}$$

Более того, покажем, что п.н. произойдет бесконечное число событий B_n с индексами n вида m^l ($l \in \mathbb{N}$). **Независимость приращений винеровского процесса и то, что в определении B_n величина $i \geqslant 2$, обеспечивают независимость событий** B_{m^l}, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая (4.70), и обозначив $\tau = \varepsilon/(8m\sqrt{q})$, имеем,

$$P(B_n) \geqslant P\left(\max_{2\leqslant i\leqslant m} \max_{1\leqslant j\leqslant q} |g_n^{(j)}(i/m) - g_n^{(j)}((i-1)/m) - (x^{(j)}(i/m) - x^{(j)}((i-1)/m))| < \tau\right) \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{q} P(\sqrt{2m\mathrm{Log\,Log}n}|x^{(j)}(i/m) - x^{(j)}((i-1)/m)| <$$

$$< w(1) < \sqrt{2m\mathrm{Log\,Log}n}(|x^{(j)}(i/m) - x^{(j)}((i-1)/m)| + \varepsilon/\tau).$$

Воспользуемся следующим результатом.

Упр. 4.18. Для $0 \leqslant u < v < \infty$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^v e^{-s^2/2}ds \geqslant \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}(1 - e^{-(u^2-v^2)/2}).$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{m\to\infty} m\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}(x^{(j)}(i/m) - x^{(j)}((i-1)/m))^2 = \int_0^1 \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt$$

(очевидно, множество таких x плотно в K), получим, что

$$P(B_n) \geqslant \exp\{-\nu\mathrm{Log\,Log}n\} \tag{4.71}$$

при $\nu \in (a,1)$, $\nu = \nu(x(\cdot), m)$ и всех достаточно больших l.

Остается заметить, что $\sum_l P(B_{m^l}) = \infty$ в силу (4.71) и воспользоваться **второй леммой Бореля – Кантелли**: если события $A_1, A_2, \ldots$ независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(A_n$ б.ч.$) = 1$. □

Еще одно обобщение закона повторного логарифма представляет собой **интегральный критерий Колмогорова – Петровского** (см. [**?**]), часто говорят также критерий Колмогорова – Петровского – Эрдеша – Феллера.

Теорема Д4.19. *Пусть $\phi(t)$, $t > 0$ – неубывающая функция такая, что $\phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда*

$$P(w(t) > \sqrt{t}\phi(t) \text{ б.ч.}) = \begin{cases} 0, & \text{если } I(\phi) < \infty, \\ 1, & \text{если } I(\phi) = \infty, \end{cases}$$

где

$$I(\phi) = \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} \exp\{-\phi(t)^2/2\} dt.$$

Заметим, что эта теорема дает более тонкий результат, чем теорема 4.16, поскольку вычисление $I(\phi)$ показывает, что функции $\psi(t) = (1+\varepsilon)\sqrt{2t \mathrm{Log\,Log} t}$, где $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon < 0$, являются соответственно верхними или нижними (ψ – *верхняя функция*, если $P(w(t) > \psi(t)$ б.ч.$) = 0$, и *нижняя* – если $P(w(t) > \psi(t)$ б.ч.$) = 1$, снова имеется в виду рассмотрение всевозможных последовательностей $t_n \to \infty$ и $w(t_n)$). Теорема Д4.19 позволяет взять $\varepsilon = 0$, т.е. рассмотреть функцию $\psi(t) = \sqrt{2t \mathrm{Log\,Log} t}$, которая, как легко видеть (проверьте в качестве упражнения) является нижней.

В связи с теоремой Д4.19 естественно возникает вопрос: **каково множество предельных точек более общего, нежели** (4.59), **семейства**

$$f_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{n}\phi(n)}, \ t \in [0,1], \ n \in \mathbb{N},$$

где ϕ – та же функция, что и в теореме Д4.19.

Теорема Д4.20 ([?]). $\mathcal{C}(\{f_n\}) = K_R$ *п.н., где K_R, $R = R(\phi)$, состоит из абсолютно непрерывных функций x таких, что*

$$\int_0^1 |dx/dt|^2 ds \leqslant R^2,$$

(если $R = 0$, то $K_R = \{0\}$, т.е. состоит из вектор-функции, равной нулю, а если $R = \infty$, то $K_R = (C[0,1])^d$). При этом

$$R^2(\phi) = \inf\{r > 0 : \ I(\phi, r) < \infty\},$$

где

$$I(\phi, r) = \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} \exp\{-r\phi(t)^2/2\} dt.$$

Упр. 4.21. [см. [?]] Докажите, что

$$R(\phi)^{-1} = \liminf_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{2\mathrm{Log\,Log} t}$$

(здесь $0^{-1} = \infty$ и $\infty^{-1} = 0$).

Имеется много различных направлений, в которых происходило развитие функционального закона повторного логарифма (ФЗПЛ). Например, начиная с работы [?], велись исследования по оценке скорости сходимости в ФЗПЛ, см. [?] и там же ссылки. О связи ФЗПЛ с теорией больших уклонений, о рассмотрении топологий, отличных от равномерной см. [?].

Упр. 4.22. Положим $\tau_a = \inf\{t > 0 : w(t) = a\}$, где $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\tau_a \stackrel{\mathcal{D}}{=} a^2 \tau_1$.

Упр. 4.23. Пусть U – это наибольший нуль процесса w на отрезке $(0,t)$. Докажите, что

$$P(U \leqslant x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{t}}, \ x \geqslant 0.$$

Лекция 5. Мартингалы

Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Пополнение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений полосы. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона. Сходимость мартингалов в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Теорема Леви. Следствия для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

Цель данной лекции – дать начальные представления об очень обширной и глубокой теории мартингалов, имеющей разнообразные приложения.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и некоторая фильтрация $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$, т.е. неубывающее семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \in T$ ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ при $s \leqslant t$, $s, t \in T$). Говорят, что $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$, где $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, есть *мартингал*, если для всех $s, t \in T$, $s \leqslant t$ выполнены следующие условия

1) $X_t \in \mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, другими словами, случайный процесс $\{X_t,\ t \in T\}$ *согласован с семейством* $\{\mathcal{F}_t,\ t \in T\}$,

2) $\mathsf{E}|X_t| < \infty$,

3) $\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ п.н.

Если вместо 3) требуется, чтобы $\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$ п.н., то $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ называется *субмартингалом*. Замена 3) на условие $\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$ п.н. приводит к определению *супермартингала*. Очевидно, $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ **является супермартингалом тогда и только тогда, когда** $(-X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – **субмартингал** (поэтому далее мы рассматриваем только мартингалы и субмартингалы). Мартингал, очевидно, является одновременно субмартингалом и супермартингалом.

Заметим, что условие 3) равносильно тому, что при всех $s, t \in T$, $s \leqslant t$ и любом $A \in \mathcal{F}_s$ верно равенство

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP. \tag{5.1}$$

Свойство субмартингальности переформулируется аналогично (5.1) с заменой знака равенства на знак "$\leqslant$".

Если $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал (субмартингал) и имеется фильтрация $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ такая, что $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, $X_t \in \mathcal{G}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ при $t \in T$, то $(X_t, \mathcal{G}_t)$ – мартингал (субмартингал). Это вытекает из "телескопического" свойства условного математического ожидания: для σ-алгебр $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$ и интегрируемой случайной величины ξ

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}_1) \ \text{ п.н.} \tag{5.2}$$

В частности, в качестве $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ всегда можно взять *естественную фильтрацию* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s,\ s \leqslant t,\ s \in T\}$, $t \in T$. "Меньше" взять нельзя, т.к. $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$ для $t \in T$ в силу свойства 1). В случаях, когда ясно, о какой фильтрации идет речь, пишут просто, что $(X_t,\ t \in T)$ – мартингал (субмартингал). Так обычно делают, когда берется естественная фильтрация. Часто используемую фильтрацию указывают при записи вероятностного пространства, т.е. пишут $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ и говорят о *фильтрованном вероятностном пространстве* или о *стохастическом базисе*. Кроме того, на одном и том же вероятностном пространстве рассматриваются разные меры P из некоторого семейства $\mathcal{P}$. Тогда используют понятие *фильтрованного стохастического эксперимента* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$. Если оперируют с несколькими мерами, то явно указывают, что $(X_t, \mathcal{F}_t, P)$ – мартингал, и пишут, что свойство 3) выполняется P-п.н.

Определение мартингала распространяется и на случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^m$, если потребовать, чтобы условия 1),2),3) выполнялись для каждой компоненты.

Для $T = \mathbb{Z}_+$ в условии 3) достаточно рассматривать (поясните) лишь $t = s + 1$. Иначе говоря, достаточно (и необходимо), чтобы

$$\mathsf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \ \text{ п.н., где } \ \Delta X_n = X_n - X_{n-1}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Последовательность $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где ξ_n – интегрируемы и согласованы с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, называют *мартингал-разностью*, если $\mathsf{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ п.н., $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, (5.3) показывает, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ – мартингал тогда и только тогда, когда $(\Delta X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ – мартингал-разность ($\Delta X_0 := 0$).

Приведем ряд примеров.

1. Пусть $\{X_t, \, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ – процесс с независимыми приращениями, для которого $\mathsf{E}X_t = c$ при $t \in T$ $(c = const)$. Тогда $(X_t)_{t\in T}$ – мартингал. Действительно, при $s \leqslant t$, $s, t \in T$ и естественной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ имеем

$$\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathsf{E}(X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s) = \mathsf{E}(X_t - X_s) + X_s \ \text{ п.н.} \tag{5.4}$$

Мы учли, что $X_t - X_s$ – не зависит от $\mathcal{F}_s$ (см. лемму 4.2) и $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathsf{E}\xi$, если ξ не зависит от $\mathcal{A}$ и $\mathsf{E}\xi$ существует. Следовательно, **винеровский процесс является мартингалом**. **Процесс $\{N_t - \mathsf{E}N_t, \ t \in \mathbb{R}_+\}$, где $\{N_t, \, t \geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс, также является мартингалом**. Доказательство (5.4) показывает, что можно использовать не только естественную фильтрацию. Важно, что интегрируемый при каждом t процесс X_t согласован с $\mathcal{F}_t$ и $X_t - X_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$. В частности, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют мартингал, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые величины и $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_1, \ldots, S_n\} = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Пусть ζ_n, $n \in \mathbb{N}$ – независимые величины и $\mathsf{E}\zeta_n = 1$ при всех n. Положим $X_n = \prod_{k=1}^n \zeta_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал (объясните).

3. Пусть на $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы меры Q, P, фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ и пусть $Q \overset{loc}{\ll} P$, т.е. $Q_t := Q|_{\mathcal{F}_t} \ll P_t := P|_{\mathcal{F}_t}$, $t \in T$. Другими словами, сужение меры Q абсолютно непрерывно относительно сужения меры P на $\mathcal{F}_t$ при каждом $t \in T$. Пусть меры ν и μ заданы на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Напомним, что $\nu \ll \mu$ (*мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ*), если $\mu(A) = 0$ влечет $\nu(A) = 0$. Это равносильно тому, что существует $\mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая и интегрируемая по мере μ функция g ($g \geqslant 0$ μ-п.н.), называемая плотностью меры ν по мере μ, и обозначаемая $d\nu/d\mu$, такая, что $\nu(B) = \int_B g d\mu$ при всех $B \in \mathcal{A}$. Итак, положим $g_t = dQ_t/dP_t$. Тогда $(g_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал. Для $s \leqslant t$, $s, t \in T$, $B \in \mathcal{F}_s$ (а значит $B \in \mathcal{F}_t$), учитывая определение плотности, получаем

$$\int_B g_s dP_s = Q_s(B) = Q(B) = Q_t(B) = \int_B g_t dP_t.$$

Остается сослаться на (5.1). Заметим, что если $Q \ll P$, то $Q \overset{loc}{\ll} P$.

4. Рассмотрим следующую **модель азартной игры**. Пусть $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – независимые величины, принимающие значения 1 и -1 (все рассматриваемые случайные величины заданы на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Считаем, что $\varepsilon_n = 1$ означает выигрыш в n-ой

партии, и $\varepsilon_n = -1$ при проигрыше. Пусть случайная величина V_n – это ставка игрока в n-ой партии, которую при $n \geqslant 2$ естественно считать зависимой (измеримым образом) от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ и $V_1, \dots, V_{n-1}$. Также естественно предположить, что начальная ставка V_1 не зависит от $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $\mathcal{F}_0 = \sigma\{V_1\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{V_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Итак, будем считать последовательность $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *предсказуемой*, т.е. $V_n \in \mathcal{F}_{n-1}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ (пишут $(V_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$). В частности, если $V_0 \equiv const$, то $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Суммарный выигрыш (проигрыш, если он отрицателен) игрока за n партий составляет

$$X_n = X_{n-1} + V_n\varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} V_k \Delta Y_k, \ n \in \mathbb{N} \ \ (X_0 = 0), \tag{5.5}$$

здесь $\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}$, где $Y_0 = 0$, $Y_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ называют *дискретным стохастическим интегралом V по Y* и обозначают $(V \cdot Y)$. Считая, что $\mathsf{E}V_k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ (все $V_k \geqslant 0$ по смыслу задачи), получаем из (5.5)

$$\mathsf{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = V_n \mathsf{E}\varepsilon_n \ \text{ п.н. при } n \in \mathbb{N},$$

поскольку V_n – предсказуемый процесс и ε_n не зависит от $\mathcal{F}_{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал, если $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$, т.е. $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ для $n \in \mathbb{N}$, и $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – субмартингал, если $P(\varepsilon_n = 1) \geqslant 1/2$ при $n \in \mathbb{N}$ (супермартингал в случае противоположных неравенств). Соответственно говорят о *справедливой, благоприятной (неблагоприятной) игре.*

Рассмотрим специальную стратегию игры, когда $V_1 = 1$ и

$$V_n = 2^{n-1}\mathbb{1}\{\varepsilon_1 = -1, \dots, \varepsilon_{n-1} = -1\}, \ n \geqslant 2.$$

Другими словами, после каждого проигрыша ставка удваивается (начальная ставка равна единице) и при первом выигрыше игра прекращается. Введем момент τ прекращения игры, $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, \infty\}$. Покажем, что τ – марковский момент относительно семейства σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Действительно,

$$\{\tau = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0, \ \{\tau = n\} = \{\varepsilon_1 = -1, \dots, \varepsilon_{n-1} = -1, \varepsilon_n = 1\} \in \mathcal{F}_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Если игра справедлива, то $P(\tau = n) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $P(\tau < \infty) = 1$. При этом $X_\tau = 1$, т.к. на множестве $\{\tau = n\}$, $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$X_\tau = X_n = -\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 2^{n-1} = 1.$$

Итак, $P(X_\tau = 1) = 1$ и $\mathsf{E}X_\tau = 1$, хотя заметим, что $\mathsf{E}X_n = 0$ для $n \in \mathbb{N}$ при справедливой игре.

Разумеется, с практической точки зрения данная стратегия (называемая **мартингалом**, что послужило основанием для математического термина) является нереализуемой. Необходимо иметь неограниченный капитал, и игра может продолжаться негранично долго. Отметим также, что процесс (5.5) дает простой пример мартингала, который не обязан иметь независимые приращения.

5. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – некоторая фильтрация и ξ – интегрируемая случайная величина. Положим $X_t = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$, $t \in T$. Тогда (5.2) показывает, что $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал. Этот процесс называют *мартингалом Леви.*

Широкую возможность строить примеры субмартингалов предоставляет

Лемма 5.1. *Пусть $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, и величина $Y_t = h(X_t)$ интегрируема при каждом $t \in T$. Тогда $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – субмартингал. Если функция h не убывает, то утверждение леммы сохранится и в случае, когда $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – субмартингал.*

$\square$ Условное неравенство Йенсена (см. [?, с. 250]) дает, что с вероятностью единица при $s \leqslant t$ $(s, t \in T)$

$$h(X_s) = h(\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) \leqslant \mathsf{E}(h(X_t)|\mathcal{F}_s). \tag{5.6}$$

Если $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – субмартингал и h не убывает, то равенство в (5.6) заменяется на неравенство $h(X_s) \leqslant h(\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ п.н. $\square$

Структуру случайных процессов с дискретным временем выявляет следующий результат, называемый **разложением Дуба**.

Теорема 5.2 (Дуб). *Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан интегрируемый (при каждом n) случайный процесс $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Тогда существует единственное (п.н.) разложение вида $X = M + A$, т.е. $X_n = M_n + A_n$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, где $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – мартингал, $(A_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – предсказуемый процесс с $A_0 \equiv 0$ и $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$. В частности, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является субмартингалом тогда и только тогда, когда процесс A не убывает, т.е. $\Delta A_n \geqslant 0$ п.н. при $n \in \mathbb{N}$.*

$\square$ Если имеет место указанное представление X, то $\Delta A_n = \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1})$ при всех $n \in \mathbb{N}$ в силу (5.3), и тогда $(A_0 = 0)$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}),\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.7}$$

что доказывает единственность разложения.

Для произвольного X, удовлетворяющего условиям леммы определим предсказуемый процесс A формулой (5.7) и положим $A_0 = 0$. Тогда $M = X - A$ есть мартингал, поскольку условия 1),2), очевидно, выполнены и

$$\mathsf{E}(\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \Delta A_n = 0 \ \text{ п.н.},\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.8}$$

Утверждение теоремы, относящееся к субмартингалам, сразу следует из формул (5.7) и (5.8). $\square$

Приведем **пример, показывающий полезность теоремы 5.2** даже в простой ситуации. Пусть $S_0 = 0$, $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – независимые бернуллиевские величины такие, что $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разложение Дуба для субмартингала (в силу леммы 5.1) $X_n = |S_n|$, $(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, $n \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Имеем $\Delta X_n = |S_n| - |S_{n-1}|$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta M_n = \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = |S_n| - \mathsf{E}(|S_n||\mathcal{F}_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Теперь заметим, что

$$|S_n| = |S_{n-1} + \varepsilon_n| = (S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbb{1}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbb{1}\{S_{n-1} = 0\} - (S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbb{1}\{S_{n-1} < 0\}. \tag{5.10}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}(|S_{n-1} + \varepsilon_n||\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}((S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbb{1}\{S_{n-1} > 0\}|\mathcal{F}_{n-1}) +$$
$$+ \mathsf{E}(\mathbb{1}\{S_{n-1} = 0\}|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathsf{E}((S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbb{1}\{S_{n-1} < 0\}|\mathcal{F}_{n-1}) =$$

$$= S_{n-1}\mathbb{1}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbb{1}\{S_{n-1} = 0\} - S_{n-1}\mathbb{1}\{S_{n-1} < 0\},\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Мы учли, что $\mathsf{E}(\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\varepsilon_n = 0$. Из (5.9) – (5.11) следует, что

$$M_n = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{sgn} S_{k-1})\Delta S_k,$$

где

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Согласно (5.7), имеем

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(\mathsf{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k||\mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}|).$$

Из (5.11) видно, что $\mathsf{E}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{1}_{\{S_{k-1}=0\}}$ для $k \in \mathbb{N}$, поэтому $A_n = L_n(0)$, где

$$L_n(0) = \#\{k,\ 1 \leqslant k \leqslant n :\ S_{k-1} = 0\},$$

т.е. $L_n(0)$ – это число нулей последовательности $\{S_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$. Таким образом,

$$|S_n| = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{sgn} S_{k-1})\Delta S_k + L_n(0), \tag{5.12}$$

что есть дискретный аналог известной **формулы Танака** для модуля броуновского движения. Из (5.12) вытекает, что

$$\mathsf{E}L_n(0) = \mathsf{E}|S_n|. \tag{5.13}$$

Пользуясь простыми результатами о сходимости распределений случайных величин, приходим к формуле

$$\mathsf{E}L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}n} \ \text{ при } n \to \infty. \tag{5.14}$$

Теории слабой сходимости (не только действительных случайных величин) посвящена следующая лекция и дополнение к ней, поэтому доказательство (5.14) отнесено в упражнение 6.7.

Замечание 5.3. В теореме 5.2 мы требовали, чтобы $A_0 \equiv 0$ вместо $A_0 = 0$ п.н. (хотя обычно все равенства и неравенства со случайными величинами понимаются выполнеными почти наверное). Дело в том, что последняя запись не гарантировала бы, что $A_1 = \mathsf{E}(\Delta X_1|\mathcal{F}_0) + A_0$ является $\mathcal{F}_0|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – измеримой величиной. Чтобы избежать подобных неприятностей, **всегда полагают, что исходное вероятностное пространство** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **полно и фильтрация** $(\mathcal{F}_t)_{t\in T\subset\mathbb{R}}$ **также полна**, т.е. каждая σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ содержит все P-нулевые множества $\mathcal{F}$ (для простоты рассматриваем одну меру на $(\Omega, \mathcal{F})$). Обозначим $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} :\ P(A) = 0\}$. Для σ-алгебры $\mathcal{A}$ положим $\overline{\mathcal{A}} = \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \cup N,$ где $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$. Очевидно, $\widetilde{\mathcal{A}}$ есть σ-алгебра, и $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{A}}$. С другой стороны, $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$, поэтому $\overline{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. Следовательно, $\overline{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}$. Положив $\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t, \mathcal{N}\}$, получим (наименьшую) полную фильтрацию, содержащую исходную ($\mathcal{F}_t \subset \overline{\mathcal{F}}_t$ при $t \in T$).

Лемма 5.4. *Пусть $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал (субмартингал). Тогда $(X_t, \overline{\mathcal{F}}_t)_{t\in T}$ – мартингал (субмартингал).*

□ Очевидно, $(X_t, \overline{\mathcal{F}}_t)_{t\in T}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) (учитываем, что $\mathcal{F}_t \subset \overline{\mathcal{F}}_t$, $t \in T$). Выберем $s \leqslant t$, $s, t \in T$ и покажем, что $\mathsf{E}(X_t|\overline{\mathcal{F}}_s) = X_s$ п.н. Действительно, $X_s \in \overline{\mathcal{F}}_s|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и для любого $A \in \overline{\mathcal{F}}_s$ найдется $B \in \mathcal{F}_s$ и $C \in \mathcal{N}$ такие, что $A = B \cup C$ (при этом в силу полноты $\mathcal{F}$ можно считать $BC = \emptyset$). Применяя (5.1), имеем

$$\int_A X_s dP = \int_B X_s dP = \int_B X_t dP = \int_A X_t dP. \tag{5.15}$$

Мы воспользовались тем, что если существует $\mathsf{E}\xi$ и $P(C) = 0$, то $\mathsf{E}\xi\mathbb{1}_C = 0$. Для субмартингала второе равенство в (5.15) заменится на неравенство "$\leqslant$". □

Если $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – субмартингал, то неубывающая предсказуемая последовательность $(A_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}_+}$, фигурирующая в разложении Дуба ($A_0 = 0$, $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$), называется *компенсатором* ("компенсация" превращает субмартингал в мартингал). Пусть $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – *квадратично интегрируемый мартингал*, т.е. $\mathsf{E}M_n^2 < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда в силу леммы 5.1 получаем, что $M^2 = (M_n^2, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – субмартингал. По теореме Дуба $M_n^2 = m_n + \langle M\rangle_n$, где m_n – мартингал, а $\langle M\rangle_n$ – компенсатор, называемый *квадратической характеристикой* M. Из (5.7) для $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta M_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}((\Delta M_k)^2|\mathcal{F}_{k-1}), \tag{5.16}$$

поскольку $\mathsf{E}(M_k M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}\mathsf{E}(M_k|\mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}^2$, $k \in \mathbb{N}$. **Квадратическая характеристика может рассматриваться как аналог дисперсии**. В частности, если $M_0 = 0$ и $M_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые центрированные величины с $\mathsf{E}\xi_k^2 < \infty$ ($k \in \mathbb{N}$), то (5.16) показывает, что $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathsf{D}\xi_k = \mathsf{D}M_n$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль играет также понятие *квадратической вариации* процесса $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, задаваемой формулой

$$[X]_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta X_k)^2,\ n \in \mathbb{N}\ ([X]_0 = 0). \tag{5.17}$$

Теперь мы **обратимся к характеризации свойства мартингальности** (субмартингальности) **в терминах, использующих марковские моменты**. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – *стохастическая последовательность*, т.е. процесс $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ согласован с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Марковские моменты мы будем рассматривать относительно этой фильтрации. Марковский момент τ назовем *ограниченным*, если $\tau \leqslant k$ п.н. для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Положим $X_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$, если $\tau(\omega) = \infty$ ($P(\tau = \infty) = 0$ для ограниченных τ).

Теорема 5.5 (о свободном выборе, Дуб). *Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – стохастическая последовательность, состоящая из интегрируемых случайных величин. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – мартингал (субмартингал);

2) $\mathsf{E}X_\tau = (\geqslant)\mathsf{E}X_\nu$ для любых ограниченных марковских моментов τ и ν таких, что $\tau \geqslant \nu$ п.н.;

3) $\mathsf{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\gamma) = (\geqslant) X_{\tau\wedge\gamma}$*, где* γ *– марковский момент,* τ *– ограниченный марковский момент и* σ*-алгебра* $\mathcal{F}_\gamma = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\gamma \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ *для каждого* $n\}$.

В приведенной формулировке знак "$\geqslant$*" (в скобках) относится к рассмотрению субмартингалов в пункте 1).*

□ **1)** $\Rightarrow$ **2)**. Пусть $\tau \leqslant k$ п.н. и $\nu \leqslant \tau$ п.н., где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$X_\tau - X_\nu = \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{\tau=m\}}\mathbb{1}_{\{\nu=j\}}(X_m - X_j) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\tau=m\}}\mathbb{1}_{\{\nu<m\}}X_m - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{\nu=j\}}\mathbb{1}_{\{\tau>j\}}X_j =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau=m\}}X_m - \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu=m-1\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}X_{m-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}X_m - \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}X_{m-1} = \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}\Delta X_m. \quad (5.18)$$

При получении (5.18) мы добавили и вычли

$$\sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m-1\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}X_{m-1} \equiv \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m+1\}}X_m \equiv \sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m+1\}}X_m.$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}(X_\tau - X_\nu) = \sum_{m=1}^{n} \mathsf{E}[\mathbb{1}_{\{\nu<m\}}\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant m\}}\mathsf{E}(\Delta X_m|\mathcal{F}_{m-1})] = (\geqslant)0.$$

2) $\Rightarrow$ **3)**. Пусть $\alpha = \tau\wedge\gamma$ и $A \in \mathcal{F}_\alpha$. Легко видеть, что

$$\alpha_A = \alpha\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{\overline{A}},\ \tau_A = \tau\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{\overline{A}},\ \beta = \alpha_A\wedge k,\ \delta = \tau_A \wedge k$$

есть марковские моменты, причем $\beta \leqslant \delta \leqslant k$ для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому $\mathsf{E}X_\delta = (\geqslant)\mathsf{E}X_\beta$. Следовательно,

$$\mathsf{E}X_\tau\mathbb{1}_A + \mathsf{E}X_k\mathbb{1}_{\overline{A}} = (\geqslant)\mathsf{E}X_\alpha\mathbb{1}_A + \mathsf{E}X_k\mathbb{1}_{\overline{A}}.$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\alpha)\mathbb{1}_A) = \mathsf{E}X_\tau\mathbb{1}_A = (\geqslant)\mathsf{E}X_\alpha\mathbb{1}_A.$$

Мы учли, что $\mathsf{E}|X_\tau| \leqslant \sum_{m=0}^{k}\mathsf{E}|X_m| < \infty$ для $\tau \leqslant k$ п.н. и то, что $\mathsf{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\gamma) \in \mathcal{F}_\alpha|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (поясните в качестве упражнения).

3) $\Rightarrow$ **1)**. Возьмем $\tau \equiv n$ и $\gamma \equiv m$, где $0 \leqslant m \leqslant n$ $(m, n \in \mathbb{Z}_+)$. Очевидно, $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_m$, поэтому из 3) получаем 1). □

Следствие 5.6. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *– мартингал (субмартингал) тогда и только тогда, когда для любой неубывающей последовательности марковских моментов* τ_n*, каждый из которых ограничен (т.е.* $\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$ *п.н. для* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\tau_n \leqslant k_n$ *п.н. для некоторых* $k_n \in \mathbb{N}$*) последовательность* $(X_{\tau_n}, \mathcal{F}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *является мартингалом (субмартингалом).*

Следствие 5.7 (максимальное и минимальное неравенства, Дуб). *Пусть* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *– субмартингал. Тогда для любого* $N \in \mathbb{N}$ *и всех* $u > 0$

$$uP(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant u) \leqslant \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant u\}} \leqslant \mathsf{E}X_N^+, \tag{5.19}$$

$$uP(\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -u) \leqslant -\mathsf{E}X_0 + \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_{\{\min\limits_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -u\}} \leqslant -\mathsf{E}X_0 + \mathsf{E}X_N^+. \tag{5.20}$$

□ Определим марковский момент $\tau = \min\{n : X_n \geqslant u\} \wedge N$. Тогда

$$\mathsf{E}X_N \geqslant \mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_\tau \mathbb{1}_A + \mathsf{E}X_\tau \mathbb{1}_{\overline{A}} \geqslant uP(A) + \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_{\overline{A}},$$

Где $A = \{\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant u\}$. Следовательно,

$$uP(A) \leqslant \mathsf{E}X_N - \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_{\overline{A}} = \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_A \leqslant \mathsf{E}X_N^+.$$

Доказательство (5.20) аналогично, следует рассмотреть $\tau = \min\{n : X_n \leqslant -u\} \wedge N$. □

Приведем обобщение неравенства Колмогорова для сумм независимых центрированных слагаемых.

Следствие 5.8. *Пусть* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *– мартингал и* $\mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ *для некоторого* $p \geqslant 1$ *и* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $u > 0$ *и* $N \in \mathbb{Z}_+$

$$P(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant u) \leqslant u^{-p}\mathsf{E}|X_N|^p.$$

□ Достаточно учесть, что $(|X_n|^p, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – субмартингал и

$$\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant u\} = \{\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \geqslant u^p\}. \ \square$$

Следствие 5.9. *Пусть* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *– мартингал или неотрицательный субмартингал. Пусть* $\mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ *при всех* $n \in \{0, \ldots, N\}$, *некоторых* $N \in \mathbb{N}$ *и* $p \in (1, \infty)$. *Тогда*

$$\|\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|\|_p \leqslant (p/(p-1))\|X_N\|_p, \tag{5.21}$$

где, как обычно, $\|\xi\|_p = (\mathsf{E}|\xi|^p)^{1/p}$.

□ Без ограничения общности (учитывая лемму 5.1) можно считать $X_n \geqslant 0$ п.н. для $n \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь формулой для вычисления момента порядка p неотрицательной случайной величины (см. [**?**, с. 223]), имеем

$$\mathsf{E}[(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n)^p] = p\int_0^\infty u^{p-1} P(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > u)du \leqslant$$

$$\leqslant p\int_0^\infty u^{p-2}\mathsf{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > u\}})du =$$

$$= \frac{p}{p-1}\mathsf{E}(X_N(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n)^{p-1}) \leqslant \frac{p}{p-1}(\mathsf{E}X_N^p)^{1/p}[\mathsf{E}(\max X_n)^p]^{(p-1)/p}.$$

Здесь был использован аналог неравенства (5.19)

$$uP(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > u) \leqslant \mathsf{E}X_N \mathbb{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > u\}},$$

для получения которого надо заметить, что величина $\tau_B = \inf\{n : X_n \in B\}$ является марковским моментом при любом множестве $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Мы учли также, что для $\eta, \xi \geqslant 0$ п.н., если существует $\mathsf{E}\eta\xi$, то

$$\mathsf{E}\eta\xi = \int_0^\infty \mathsf{E}(\eta \mathbb{1}_{\{\xi > u\}})du. \tag{5.22}$$

Последнее неравенство доказано в [?] на с. 223 для $\xi \equiv 1$. Оно легко проверяется для $\xi = \sum_{j=1}^m c_j \mathbb{1}_{A_j}$, а затем совершается предельный переход. □

Неравенство для $\|\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|\|_1$ отнесено в упражнения.

Для изучения сходимости субмартингалов нам понадобится лемма о числе $\beta_N(a,b)$ **пересечений** "снизу вверх" **субмартингалом полосы от** a **до** b **за время от** 0 **до** N. Введем необходимые обозначения. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – субмартингал и (a,b) – непустой интервал. Определим марковские моменты (поясните это) τ_k, $k \in \mathbb{N}$, положив $\tau_0 = 0$ и

$$\tau_{2m-1} = \min\{n : n > \tau_{2m-2},\ X_n \leqslant a\},\ \ \tau_{2m} = \min\{n : n > \tau_{2m-1},\ X_n \geqslant b\},\ \ m \in \mathbb{N}$$

(считаем τ_k и τ_j, $j > k$, равными бесконечности, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто). Введем (см. рис. 5.1) случайную величину

$$\beta_N(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_2 > N, \\ \max\{m : \tau_{2m} \leqslant N\}, & \text{если } \tau_2 \leqslant N. \end{cases}$$

Лемма 5.10 (о числе пересечений, Дуб). *Для описанных выше величин справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\beta_N(a,b) \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_N - a)^+}{b-a} \leqslant \frac{\mathsf{E}X_N^+ + |a|}{b-a}. \tag{5.23}$$

□ Поскольку $\beta_N(a,b)$ для последовательности $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ совпадает с $\beta_N(0, b-a)$ для последовательности $((X_N - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, мы будем далее считать, $a = 0$ и $X_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $X_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Пусть для $i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i = \mathbb{1}\{\tau_m < i \leqslant \tau_{m+1} \text{ для некоторого нечетного } m\}.$$

Тогда

$$b\beta_N(0,b) \leqslant \sum_{i=1}^N (X_i - X_{i-1})\phi_i.$$

Заметим, что $\{\phi_i = 1\} = \bigcup_{m \text{ – нечетным}} \{\{\tau_m < i\} \setminus \{\tau_{m+1} < i\}\} \in \mathcal{F}_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$b\mathsf{E}\beta_N(0,b) \leqslant \sum_{i=1}^N \mathsf{E}[(X_i - X_{i-1})\phi_i] = \sum_{i=1}^N \mathsf{E}[\phi_i(\mathsf{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^N (\mathsf{E}X_i - \mathsf{E}X_{i-1}) = \mathsf{E}X_N. \ \square$$

Теорема 5.11. *Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – субмартингал такой, что $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. Тогда с вероятностью единица существует $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, причем $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$.*

□ Пусть $\underline{X} = \liminf\limits_{n\to\infty} X_n$, $\overline{X} = \limsup\limits_{n\to\infty} X_n$. Допустим $P(\underline{X} < \overline{X}) > 0$. Поскольку

$$\{\underline{X} < \overline{X}\} = \cup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b}\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\},$$

где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, то $P\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\} > 0$ для некоторых рациональных $a < b$. В силу леммы 5.10 для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}\beta_N(a,b) \leqslant (\mathsf{E}X_N^+ + |a|)/(b-a).$$

Обозначим $\beta_\infty(a,b) = \lim\limits_{N\to\infty} \beta_N(a,b)$. Тогда

$$\mathsf{E}\beta_\infty(a,b) \leqslant (\sup_N \mathsf{E}X_N^+ + |a|)/(b-a).$$

Теперь заметим, что для субмартингала $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sup_n \mathsf{E}X_n^+ < \infty \;\Leftrightarrow\; \sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty, \tag{5.24}$$

так как $\mathsf{E}X_n^+ \leqslant \mathsf{E}|X_n| = 2\mathsf{E}X_n^+ - \mathsf{E}X_n \leqslant 2\mathsf{E}X_n^+ - \mathsf{E}X_1$. Следовательно, $\mathsf{E}\beta_\infty(a,b) < \infty$ п.н., что противоречит предположению $P\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\} > 0$. Таким образом, $P\{\underline{X} < \overline{X}\} = 0$. По лемме Фату получаем $\mathsf{E}|X_\infty| \leqslant \sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. □

Теорема 5.11 применима также к мартингалам и супермартингалам (мартингал является субмартингалом, а $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – субмартингал, если $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – супермартингал). При этом условие $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$ автоматически выполняется для неотрицательных супермартингалов (а тем самым – и для неотрицательных мартингалов).

Следствие 5.12. *Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал или неотрицательный субмартингал такой, что $\sup_n \mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ для некоторого $p \in (1,\infty)$. Тогда существует $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ не только п.н., но и в L^p.*

□ По следствию 5.9

$$\mathsf{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p) \leqslant (p/(p-1))^p \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}|X_n|^p. \tag{5.25}$$

По теореме 5.11 имеем $X_n \to X_\infty$ п.н. при $n \to \infty$. Теперь заметим, что

$$|X_n - X_\infty|^p \leqslant 2^{p-1}(|X_n|^p + |X_\infty|^p) \leqslant 2^p \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p. \tag{5.26}$$

Утверждение вытекает из (5.25), (5.26) и теоремы о мажорируемой сходимости. □

В качестве применения теоремы о сходимости мартингалов рассмотрим следующий пример.

Пример 5.13 (ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона). Пусть имеется массив $\{\xi_k^{(n)};\, k,n \in \mathbb{N}\}$, состоящий из независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих целые неотрицательные значения и для которых $\mathsf{E}\xi_1^{(1)} = \mu > 0$. Положим $S_0 = 1$, $S_1 = \xi_1^{(1)}$ и $S_n = \sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)}$ при $n \geqslant 2$ ($\sum_{k=1}^{0} \xi_k^{(n)} := 0$, $n \in \mathbb{N}$). Можно считать, что S_n представляет собой численность популяции в n-ом поколении (в n-ый момент времени). А именно, **в каждом поколении любой член популяции независимо от других дает случайное число потомков в соответствии с распределением величины $\xi_1^{(1)}$, в момент $n = 0$ имелся один представитель популяции**. Удобно говорить о частицах, которые могут распадаться.

Заметим, что $(S_0, \dots, S_{n-1})$ для каждого n не зависит от $\{\xi_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\}$. **Введем случайные величины**

$$X_n = S_n/\mu^n,\ n \in \mathbb{N},$$

и докажем, что они образуют мартингал относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Имеем для $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)}|X_0, \dots, X_{n-1})/\mu^n =$$

$$= \mu^{-n}\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)}\middle|S_0, \dots, S_{n-1}\right) = \mu^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{S_{n-1}=j\}}\sum_{k=1}^{j}\xi_k^{(n)}\middle|S_0, \dots, S_{n-1}\right) =$$

$$= \mu^{-n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{S_{n-1}=j\}}\sum_{k=1}^{j}\mathsf{E}(\xi_k^{(n)}|S_0, \dots, S_{n-1}) = \mu^{-n+1}\sum_{j=1}^{\infty} j\,\mathbb{1}_{\{S_{n-1}=j\}} = S_{n-1}/\mu^{n-1}.$$

Теперь заметим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}|X_n| = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}X_n = 1.$$

Следовательно (теорема 5.11), $X_n \to X_\infty$ п.н. при $n \to \infty$ и $\mathsf{E}X_\infty < \infty$. Отсюда вытекает, что при $n \to \infty$

$$S_n \to 0\ \text{ п.н., если } \mu < 1\ \text{ и } S_n \to \infty\ \text{ п.н., если } \mu > 1.$$

В случае $\mu = 1$ можно доказать методом производящих функций (см., напр., [**?**, §36]), что $S_n \to 0$ п.н. при $n \to \infty$. □

Опишем сходимость мартингалов в пространстве $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Теорема 5.14. *Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – мартингал. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $X_n = \mathsf{E}(X|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где X – некоторая интегрируемая случайная величина;

2) последовательность $\{X_n\}$ равномерно интегрируема;

3) существует случайная величина X_∞ такая, что $\mathsf{E}|X_\infty - X_n| \to 0$ при $n \to \infty$;

4) $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$ и для $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ (предел существует п.н. и интегрируем в силу теоремы 5.11) $X_k = \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым, последовательность $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}}$, где $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{F}_n$, образует мартингал.

□ **1) ⇒ 2)**. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ и любых $a > 0$, $b > 0$ имеем

$$\mathsf{E}|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > a\} \leqslant \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X_n| > a\} =$$

$$= \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X_n| > a, |X| \leqslant b\} + \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X_n| > a, |X| > b\} \leqslant$$

$$\leqslant bP(|X_n| > a) + \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X| > b\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b}{a}\mathsf{E}|X_n| + \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X| > b\} \leqslant \frac{b}{a}\mathsf{E}|X| + \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X| > b\}.$$

Поэтому,

$$\lim_{a\to\infty}\sup_n \mathsf{E}|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > a\} \leqslant \mathsf{E}|X|\mathbb{1}\{|X| > b\}.$$

Остается заметить, что $b > 0$ выбиралось произвольным.

2) $\Rightarrow$ **3)**. Равномерная интегрируемость $\{X_n\}$ влечет, что $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. Следовательно, п.н. существует $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. Но сходящаяся п.н. и равномерно интегрируемая последовательность сходится в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

3) $\Rightarrow$ **4)**. Из условия 3) вытекает, что $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. Поэтому п.н. существует $Y = \lim_{n\to\infty} X_n$, причем $\mathsf{E}|Y| < \infty$. Но тогда $Y = X_\infty$ п.н. Для любых $n, k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathsf{E}|\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k) - \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_k)| \leqslant \mathsf{E}|X_n - X_\infty|.$$

Но $\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k) = X_k$ п.н. при $n \geqslant k$. Следовательно, $X_k = \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_k)$ п.н., $k \in \mathbb{Z}_+$. Для доказательства последнего утверждения пункта 4) заметим, что $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ в силу замечания 4.7 (считаем $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$ пополненными, поэтому σ-алгебра $\mathcal{F}_\infty$ полна).

4) $\Rightarrow$ **1)** – очевидно. $\square$

Приведем **пример неравномерно интегрируемого мартингала**. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р. величины, $P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 2) = 1/2$. Положим $X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$. Тогда $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$, $P(X_n \neq 0) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $X_n \to 0$ п.н. при $n \to \infty$. Кроме того, $\mathsf{E}|X_n - 0| = \mathsf{E}X_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Остается применить теорему 5.14.

Теорема 5.15 (Леви). *Пусть* $\mathsf{E}|X| < \infty$ *и* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *– неубывающий поток σ-алгебр в* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Положим* $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$X_n := \mathsf{E}(X|\mathcal{F}_n) \to \mathsf{E}(X|\mathcal{F}_\infty) \ \text{ п.н. и в } \ L^1(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{5.27}$$

$\square$ $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – **равномерно интегрируемый мартингал** в силу теоремы 5.14. Поэтому достаточно доказать лишь сходимость п.н. в (5.27). Согласно той же теореме $X_n \to X_\infty$ п.н. (и в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$) при $n \to \infty$. Поскольку $X_n \in \mathcal{F}_n|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $X_n \in \mathcal{F}_\infty|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, учитывая замечание 4.7, $X_\infty \in \overline{\mathcal{F}}_\infty|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $\overline{\mathcal{F}}_\infty$ – пополнение $\mathcal{F}_\infty$. Для доказательства того, что $X_\infty = \mathsf{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ п.н. остается проверить лишь, что $\mathsf{E}X\mathbb{1}_A = \mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_A$ для любого $A \in \mathcal{F}_\infty$, поскольку $\mathsf{E}(X|\mathcal{F}_\infty) = \mathsf{E}(X|\overline{\mathcal{F}}_\infty)$ п.н. Легко видеть, что $\mathcal{A} = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ является алгеброй и $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{A})$. Поэтому (см. доказательство леммы 4.2) для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $A \in \mathcal{F}_\infty$ найдется $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что $P(A\Delta A_\varepsilon < \varepsilon$. Таким образом, $A_\varepsilon \in \mathcal{F}_n$ при всех $n \geqslant N$, где $N = N(\varepsilon, A)$. Далее,

$$|\mathsf{E}X\mathbb{1}_A - \mathsf{E}X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}| \leqslant \mathsf{E}|X|\mathbb{1}_{A\Delta A_\varepsilon}, \quad |\mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_A - \mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_{A_\varepsilon}| \leqslant \mathsf{E}|X_\infty|\mathbb{1}_{A\Delta A_\varepsilon}.$$

Принимая во внимание, что $\mathsf{E}|\xi|\mathbb{1}_B \to 0$ для интегрируемой величины ξ, при $P(B) \to 0$, видим, что доказательство завершается следующим образом. При $n \geqslant N$

$$|\mathsf{E}X\mathbb{1}_{A_\varepsilon} - \mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_{A_\varepsilon}| = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) - \mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_{A_\varepsilon}| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}|\mathsf{E}(X|\mathcal{F}_n) - X_\infty| = \mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0, \ (n \to \infty). \ \square$$

Исследование мартингалов и субмартингалов в случае непрерывного времени, как правило, сложнее, чем в случае дискретного времени. **Однако ряд результатов переносится** (при определенных условиях) **на процессы с непрерывным временем** очень просто. Так, далее нам понадобится следующее утверждение.

Следствие 5.16. *Пусть* $(X_s, \mathcal{F}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ *– субмартингал, имеющий п.н. непрерывные траектории. Тогда для любого* $c > 0$

$$P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \geqslant c) \leqslant \mathsf{E}X_t^+/c. \tag{5.28}$$

□ Для любого $u > 0$, учитывая непрерывность траекторий X_s, $0 \leqslant s \leqslant t$, имеем

$$\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s > u\} = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{0\leqslant k2^{-n}\leqslant t} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_t > u\}.$$

Рассуждения, полностью аналогичные приведенным при доказательстве (5.19) (вместо $X_0, \ldots, X_N$ рассматриваем $X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}$, $s_1 < \ldots < s_m$) дают

$$P(\cup_{n=1}^{N} \cup_{0\leqslant k2^{-n}\leqslant t} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_t > u\}) \leqslant \mathsf{E}X_t^+/u.$$

Очевидно, $P(\cup_{n=1}^{N} B_n) \to P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$, $N \to \infty$. Остается взять $u \downarrow c$. □

Следствие 5.17. *Пусть $(X_s, \mathcal{F}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ – квадратично интегрируемый мартингал (т.е. $\mathsf{E}X_s^2 < \infty$ для $s \in [0,t]$), имеющий п.н. непрерывные траектории. Тогда при всех $c > 0$*

$$P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s| \geqslant c) \leqslant c^{-2}\mathsf{E}X_t^2. \tag{5.29}$$

□ Как и при доказательстве следствия 5.8, учитываем, что $(X_s^2, \mathcal{F}_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ – субмартингал. После этого применяем (5.28). □

Дополнения и упражнения.

Упр. 5.1. Пусть $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность интегрируемых случайных величин, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{E}\xi_{n+1} f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \tag{5.30}$$

для любой ограниченной борелевсой функции $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Интересно сопоставить (5.30) со следующим просто проверяемым утверждением. Действительные случайные величины ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, (необязательно интегрируемые) независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{cov} g(\xi_{n+1}) f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$$

для всех n и любых ограниченных борелевских функций $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Упр. 5.2. Докажите, что если $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность мартингал-разностей, то $(S_{n,m}, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant m}$ – мартингал с нулевым средним для каждого $m \in \mathbb{N}$, где

$$S_{n,m} = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}, \ n \geqslant m.$$

В частности, утверждение справедливо для независимых центрированных величин ξ_n и $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Упр. 5.3. Пусть урна содержит a белых и b черных шаров. Из урны последовательно наудачу вынимается один шар, который возвращается обратно с добавлением c шаров того же цвета. Обозначим X_n ($n \in \mathbb{N}$) – отношение числа белых шаров к общему числу шаров в урне после n-го вынимания шара и возвращения его в урну вместе с c шарами того же цвета ($X_0 := a/(a+b)$). Докажите, что $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – мартингал.

Упр. 5.4. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \mu)$, где μ – мера Лебега. Пусть $\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность измельчающихся разбиений отрезка $[0,1]$, а именно, T_n состоит из точек $0 = t_{n,0} < \ldots < t_{n,m_n} = 1$ и $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $m_n \geqslant 2$. Введем σ-алгебры, порожденные промежутками $\Delta_{n,1} = [0, t_{n,0}]$, $\Delta_{n,k} = (t_{n,k-1}, t_{n,k}]$, $2 \leqslant k \leqslant m_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ положим

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{f(t_{n,k}) - f(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал.

Упр. 5.5. Пусть в условиях предыдущего упражнения f удовлетворяет условию Липшица, т.е. $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ для $x, y \in [0,1]$ и некоторой константы $L > 0$. Пусть разбиения T_n таковы, что $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$, $n \to \infty$. Докажите, что $\vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n = \mathcal{B}[0,1]$ и последовательность $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно интегрируема. Тогда по теореме 5.16 получим, что $X_n \to X_\infty$ п.н. и в L^1 при $n \to \infty$, где $X_\infty \in \mathcal{B}[0,1]|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Следовательно, для любого $[a,b] \subset [0,1]$

$$\int_a^b X_n d\mu = \mathsf{E} X_n \mathbb{1}_{[a,b]} \to \mathsf{E} X_\infty \mathbb{1}_{[a,b]} = \int_a^b X_\infty d\mu, \quad n \to \infty. \tag{5.31}$$

Объясните, почему $\displaystyle\int_a^b X_n d\mu \to f(b) - f(a)$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (5.31) последует, что f – абсолютно непрерывная функция, имеющая плотность X_∞.

Упр. 5.6. Пусть $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность действительных случайных величин, заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, и пусть $f_n^0(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_n^1(x_1, \ldots, x_n)$ – семейства плотностей относительно меры Лебега в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим отношение правдоподобия

$$L_n(\omega) = \frac{f_n^0(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))}{f_n^1(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))}, \quad n \in \mathbb{N},$$

полагая, что f_n^1 – истинная плотность $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$ и, считая, что $f_n^0(z) = 0$, если $f_n^1(z) = 0$ (тогда $L_n(z) := 0$). Докажите, что $(L_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – мартингал, где $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Упр. 5.7. Пусть $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – комплекснозначный мартингал, т.е. $((\mathrm{Re}X_t, \mathrm{Im}X_t), \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал со значениями в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ п.н. для $s \leqslant t$, $s, t \in T$ ($\mathsf{E}(Y + iZ|\mathcal{A}) := \mathsf{E}(Y|\mathcal{A}) + i\mathsf{E}(Z|\mathcal{A})$ для интегрируемых Y, Z и σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$). Пусть $\mathsf{E}|X_t|^2 < \infty$ для $t \in T$. Докажите, что $\{X_t,\ t \in T\}$ – процесс с некоррелированными приращениями, т.е. $\mathsf{E}(X_t - X_s)\overline{(X_u - X_v)} = 0$ для $v < u \leqslant s < t$, $v, u, s, t \in T$.

Упр. 5.8. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых действительных случайных величин. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $X_n = e^{itS_n}/\mathsf{E}e^{itS_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – (комплекснозначный) мартингал, где $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда можно получить (см. [?, с. 547]), что следующие утверждения о $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ эквивалентны:

1) ряд сходится п.н.,

2) ряд сходится по вероятности,

3) ряд сходится по распределению

(каждый раз в соответствующем смысле берется предел частных сумм ряда). Заметим, что по закону 0 или 1 Колмогорова данный ряд сходится п.н. или с вероятностью 0.

Упр. 5.9. Пусть $\{Y_t,\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ – (комплекснозначный) процесс с независимыми приращениями такой, что $\mathsf{E}|Y_t|^2 < \infty$, $t \in T$. Докажите, что существует неслучайная функция $h : T \to \mathbb{R}$ такая, что $X_t = |Y_t|^2 - h(t)$ – мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_t = \sigma\{Y_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\}$, $t \in T$, тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{E}|Y_t - Y_s|^2 = h(t) - h(s),\ s \leqslant t,\ s,t \in T. \tag{5.32}$$

Лемма Д5.10. *Пусть $\{Y_t,\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ –действительный процесс с независимыми приращениями. Пусть*

$$\mathsf{E}e^{vY_t} < \infty,\ \mathsf{E}e^{v(Y_t - Y_s)} < \infty \text{ при некотором } v \in \mathbb{R} \text{ и всех } s \leqslant t\ (s,t \in T). \tag{5.33}$$

Положим $Z_t = f_v(t)e^{vY_t}$, $t \in T$, где $f_v : T \to \mathbb{R}$. Процесс $\{Z_t,\, t \in T\}$ является мартингалом либо при $f_v(t) \equiv 0$, $t \in T$, либо в том и только том случае, когда для каждых $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$

$$\mathsf{E}(e^{vY_t}/e^{vY_s}) = \mathsf{E}e^{vY_t}/\mathsf{E}e^{vY_s}, \tag{5.34}$$

и тогда

$$f_v(t) = c/\mathsf{E}e^{vY_t},\ t \in T, \tag{5.35}$$

где c – произвольная ненулевая константа.

□ Если Z_t, $t \in T$ – мартингал, то $\mathsf{E}Z_t = \mathsf{E}Z_{t_0}$ для $t, t_0 \in T$. Поэтому

$$f_v(t)\mathsf{E}e^{vY_t} = f_v(t_0)\mathsf{E}e^{vY_{t_0}} \ \text{ для } \ t \in T.$$

Если $f_v(t_0) = 0$, то $f_v(t) \equiv 0$, $t \in T$. Пусть далее $f_v(t_0) \neq 0$, тогда $f_v(t) \neq 0$ при $t \in T$, и, следовательно, имеет место (5.35). Заметим, что естественная фильтрация

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\} \equiv \sigma\{Y_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\},\ t \in T.$$

Учитывая независимость приращений $\{Y_t,\, t \in T\}$ и условие (5.33), для $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$ получаем

$$\mathsf{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) = \frac{f_v(t)}{f_v(s)}\mathsf{E}(e^{v(Y_t - Y_s)}e^{vY_s}f_v(s)|\mathcal{F}_s) = Z_s\frac{f_v(t)}{f_v(s)}\mathsf{E}e^{v(Y_t - Y_s)}.$$

Таким образом, $(Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ – мартингал в том и только том случае, когда

$$\mathsf{E}e^{v(Y_t - Y_s)} = \frac{f_v(s)}{f_v(t)},\ s \leqslant t\ (s,t \in T). \tag{5.36}$$

С учетом (5.35) приходим к (5.34).

Обратно. Условия (5.34) и (5.35), очевидно, влекут (5.36). □

Упр. 5.11. Выполнено ли условие (5.34), если а) $\{Y_t,\, t \in \mathbb{R}_+\}$ – винеровский процесс, б) $\{Y_t,\, t \in \mathbb{R}_+\}$ – пуассоновский процесс?

Упр. 5.12. [см. [**?**, с. 166]] Пусть $\{W_t,\, t \geqslant 0\}$ – m-мерное броуновское движение и $f(x)$ – непрерывная супергармоническая функция в $\mathbb{R}^m$, т.е. $f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$ не меньше интеграла от этой функции по любой сфере с центром в точке x. Докажите, что $f(W_t)$ – супермартингал относительно естественной фильтрации броуновского движения.

В связи с теоремой 5.11 представляет интерес

Упр. 5.13. [разложение Крикеберга] Для мартингала $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеем $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные мартингалы Y_n и Z_n (относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$) такие, что $X_n = Y_n - Z_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Упр. 5.14. [разложение Рисса] Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – равномерно интегрируемый супермартингал. Тогда существует представление вида $X_n = M_n + R_n$, где $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – равномерно интегрируемый мартингал и $(R_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – *потенциал*, т.е. равномерно интегрируемый неотрицательный супермартингал такой, что $R_n \to 0$ п.н. при $n \to \infty$.

Обширное направление исследований связано с установлением неравенств для распределений и моментов функционалов, берущихся от мартингалов (субмартингалов).

Упр. 5.15. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ – субмартингал и $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая выпуклая функция. Тогда для любых $u \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$P(\max_{1\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant u) \leqslant \mathsf{E}h(tX_N)/h(tu), \tag{5.37}$$

(неравенство нетривиально, если $\mathsf{E}h(tX_N) < \infty$).

Упр. 5.16. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ – мартингал или неотрицательный субмартингал. Тогда

$$\mathsf{E} \max_{1\leqslant n\leqslant N} |X_n| \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + \mathsf{E}|X_N| \log^+ |X_N|), \tag{5.38}$$

где $\log^+ x = \log x$ для $x \geqslant 1$ и $\log^+ x = 0$ для $x < 1$.

Для сумм независимых слагаемых оценка (5.38) может быть уточнена, как показывает следующее упражнение.

Упр. 5.17. [Дуб] Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – независимые действительные случайные величины с $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$. Положим $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $k = 1, \ldots, N$. Тогда

$$\mathsf{E} \max_{1\leqslant n\leqslant N} |X_n| \leqslant 8\mathsf{E}|X_N|, \tag{5.39}$$

Приведем несколько замечательных результатов Буркхольдера, Дэвиса и Ганди, обобщающих классические неравенства Хинчина и Марцинкевича – Зигмунда, известные для сумм независимых слагаемых. Этой тематике посвящен обзор [**?**].

Теорема Д5.18 (Буркхольдер). *Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – мартингал с $X_0 = 0$. Тогда для каждого $p > 1$ найдутся константы A_p и B_p, не зависящие от X, такие, что*

$$A_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leqslant \|X_n\|_p \leqslant B_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p, \; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.40}$$

где $[X]_n = \sum_{k=1}^n (\Delta X_k)^2$ – квадратическая вариация X ($[X]_0 = 0$). В (5.40) можно взять $A_p = [18p^{3/2}/(p-1)]^{-1}$, $B_p = 18p^{3/2}(p-1)^{1/2}$. Кроме того, следствие 5.9 показывает, что для $X_n^* = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k|$ при $p > 1$

$$A_p^* \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leqslant \|X_n^*\|_p \leqslant B_p^* \|\sqrt{[X]_n}\|_p, \tag{5.41}$$

где $A_p^* = A_p$, $B_p^* = (p/(p-1))B_p$.

Упр. 5.19. Постройте пример (см. [?, с. 532]), показывающий, что при $p = 1$ двойное неравенство (5.40) не обязано выполняться.

Как доказал Дэвис, неравенство (5.41) будет справедливо и при $p = 1$ с некоторыми положительными константами A_1^*, B_1^*, не зависящими от мартингала X.

Для моментов более общего вида, чем степенные, справедлива

Теорема Д5.20 (Буркхольдер – Дэвис – Ганди). *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – неубывающая функция, конечная и выпуклая на $[0,\infty)$, такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-\infty) = \Phi(\infty)$ и $\Phi(2t) \leqslant c\Phi(t)$ для всех $t > 0$ и некоторого $c > 0$. Тогда найдутся константы $0 < A < B < \infty$, зависящие только от c, такие, что для любого мартингала $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$*

$$A\mathsf{E}\Phi(S_\infty) \leqslant \mathsf{E}\Phi(X^*) \leqslant B\mathsf{E}\Phi(S_\infty),$$

здесь $X^* = \sup_n |X_n|$, $S_\infty = (\sum_{k=1}^\infty (\Delta X_k)^2)^{1/2}$, $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$, ($X_0 = 0$), $k \in \mathbb{N}$.

Упр. 5.21. Пусть $\{W_t,\, t \geqslant 0\}$ – m-мерное броуновское движение. Докажите, что $(\|W_t\|, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – субмартингал (с п.н. непрерывными траекториями), где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m$. Используя упражнение 5.15, с функцией $h(x) = e^{tx}$ (выбирая должным образом $t > 0$), докажите, что для каждого $s > 0$ и всех $x > \sqrt{ms}$ справедливо неравенство

$$P(\sup_{t\in[0,s]} \|W_t\| \geqslant x) \leqslant \left(\frac{sd}{ex^2}\right)^{-m/2} e^{-x^2/(2s)}. \tag{5.42}$$

Упр. 5.22. [см. [?, с.]] Пусть $\{W_t,\, t \geqslant 0\}$ – m-мерное броуновское движение, где $m \geqslant 3$. Докажите, что $|W_t| \to \infty$ п.н. при $t \to \infty$. Докажите, что с вероятностью 1 процесс W_t не вернется в точку 0 ни за какое конечное время. Объясните, почему для $m = 1$ приведенные утверждения неверны.

Нам понадобятся **некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к мартингалам с непрерывным временем**. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство и $\mathcal{N}$ – совокупность событий, имеющих нулевую вероятность. Для σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ положим $\overline{\mathcal{A}} = \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – неубывающее семейство σ-алгебр в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Введем σ-алгебру $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, $t \in \mathbb{R}_+$. **В силу леммы 5.5, изучая мартингалы или субмартингалы, мы будем считать σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ пополненными** (достаточно потребовать, чтобы $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$). Тогда, очевидно, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_{t+}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Для слабо опционального момента τ (т.е. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$) определим σ-алгебру

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \{A \in \mathcal{F} :\, A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t+} \text{ при любом } t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{5.43}$$

Заметим, что $\mathcal{F}_{\tau+}$ полна.

Упр. 5.23. Пусть τ_n, $n \in \mathbb{N}$ – слабо опциональные моменты и $\tau = \inf_n \tau_n$. Докажите, что τ – слабо опциональный момент, и $\mathcal{F}_{\tau+} = \cap_n \mathcal{F}_{\tau_n+}$. Если же τ_n – положительные марковские моменты, и $\tau < \tau_n$ на множестве $\{\tau < \infty\}$, то $\mathcal{F}_{\tau+} = \cap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$.

Лемма Д5.24. *Пусть $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – мартингал, имеющий п.н. непрерывные справа траектории. Пусть ν и τ – слабо опциональные моменты (относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$) такие, что $\nu \leqslant \tau \leqslant c$ п.н., где c – положительная константа. Тогда*

$$\mathsf{E}(X_\tau|\mathcal{F}_{\nu+}) = X_\nu \text{ п.н.}, \tag{5.44}$$

где σ-алгебра $\mathcal{F}_{\nu+}$ определена согласно (5.43) (на множествах $\{\nu = \infty\}$ и $\{\tau = \infty\}$, имеющих нулевую вероятность, соответственно полагаем $X_\nu = 0$ и $X_\tau = 0$).

□ Введем множества $T_n = 2^{-n}\mathbb{Z}_+ = \{k2^{-n},\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $(X_u, \mathcal{F}_u)_{u\in T_n}$ – мартингал. Определим $\tau(n) = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$, $\nu(n) = 2^{-n}[2^n\nu + 1]$, где $n \in \mathbb{N}$, $[\cdot]$ –целая часть числа. Очевидно, $\tau(n), \nu(n) \in T_n$ и $\tau(n) \downarrow \tau$, $\nu(n) \downarrow \nu$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Кроме того, $\nu(n) \leqslant \tau(n)$ п.н., $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\tau(n), \nu(n)$ – марковские моменты относительно фильтрации $(\mathcal{F}_u)_{u\in T_n}$, поскольку для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\{\tau(n) \leqslant k2^{-n}\} = \{\tau < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$$

(аналогично для $\nu(n)$, $n \in \mathbb{N}$). Поэтому, в силу теоремы 5.5 (несущественно, что в этой теореме рассматривалось параметрическое множество $\mathbb{Z}_+$, а не T_n)

$$\mathsf{E}(X_{\tau(n)}|\mathcal{F}_{\nu(n)}) = X_{\nu(n)} \ \text{ п.н., } n \in \mathbb{N}. \tag{5.45}$$

В силу той же теоремы для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\mathsf{E}(X_{c(m)}|\mathcal{F}_{\nu(n)}) = X_{\nu(n)} \ \text{ п.н. при } n \geqslant m,$$

здесь $c(m) = 2^{-m}[2^m c + 1]$. Рассуждения проведенные при доказательстве теоремы 5.14, показывают, что совокупность величин вида $\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_\alpha)$ равномерно интегрируема для любого семейства σ-алгебр $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$, $\alpha \in \Lambda$ (X – интегрируемая случайная величина). Учитывая непрерывность справа траекторий X_t, $t \in \mathbb{R}_+$ получаем, что $X_{\nu(n)} \to X_\nu$ п.н. и в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$. Следовательно, X_ν – интегрируемая случайная величина. Поскольку $\mathsf{E}(X_{c(m)}|\mathcal{F}_{\tau(n)}) = X_{\tau(n)}$ п.н. при $n \geqslant m$, аналогичным образом заключаем, что $X_{\tau(n)} \to X_\tau$ п.н. и в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$. В силу упражнения 5.23 имеем $\mathcal{F}_{\nu+} = \cap_n \mathcal{F}_{\nu(n)}$, поэтому $X_\nu \in \mathcal{F}_{\nu+}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Следовательно, для доказательства (5.44) надо лишь проверить, что $\mathsf{E}X_\tau \mathbb{1}_A = \mathsf{E}X_\nu \mathbb{1}_A$ для каждого $A \in \mathcal{F}_{\nu+}$. Поскольку $\mathcal{F}_{\nu+} \subset \mathcal{F}_{\nu(n)}$ для $n \in \mathbb{N}$, из (5.45) заключаем, что $\mathsf{E}X_{\tau(n)}\mathbb{1}_A = \mathsf{E}X_{\nu(n)}\mathbb{1}_A$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Остается устремить n к бесконечности в обеих частях этого равенства и воспользоваться доказанной L^1 сходимостью $X_{\tau(n)}$ к X_τ и $X_{\nu(n)}$ к X_ν. □

Замечание Д5.25. Далее мы будем использовать (в условиях леммы Д5.24) вытекающее из (5.44) соотношение $\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_\nu$. При этом, как видно из доказательства леммы Д5.24, можно не опираться на результат упражнения 5.23, а считать, что в (5.44) фигурирует $\mathcal{F}_{\nu+} = \cap_n \mathcal{F}_{\nu(n)}$.

Обратимся к модели страхования Крамера – Лундберга (1.18). Итак,

$$Y_t = y_0 + ct - S_t \ \text{ при } \ t \geqslant 0, \ \text{ где } \ S_t = \sum_{j=1}^{X_t} \eta_j, \tag{5.46}$$

а процесс $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ задается формулой (1.17) (считаем $\sum_{j=1}^{0} \eta_j = 0$). **Пусть далее $X_t = N_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $\{N_t,\ t \geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности** λ. Теорема 8.5 (доказываемая далее) утверждает, что процесс $\{N_t,\ t \geqslant 0\}$ может быть определен формулой (1.17), где $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых величин, показательно распределенных с параметром λ. Тем самым процесс N_t, $t \geqslant 0$ п.н. имеет непрерывные справа траектории, и следовательно, этим же свойством обладает процесс $\{Y_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$. Напомним, что последовательность н.о.р. величин $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ предполагается независящей от $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, что обеспечивает независимость $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ от процесса $\{N_t,\ t \geqslant 0\}$ (в смысле независимости порождаемых ими σ-алгебр в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$).

Лемма Д5.26. *Введенный в* (5.46) *процесс* $\{Y_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *имеет независимые приращения.*

□ Заметим, что если $\{Z_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ – действительный процесс с независимыми приращениями и $h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, – неслучайная действительная функция, то $\{Z_t + h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ – также процесс с независимыми приращениями. Поэтому достаточно показать независимость приращений процесса $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$. В силу теоремы 2.11 для этого достаточно (и необходимо), чтобы было выполнено соотношение (2.17). Положим $\phi(v) = \mathsf{E}e^{iv\eta_1}$, $v \in \mathbb{R}$. Учитывая независимость приращений пуассоновского процесса и его независимость от $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, имеем для $0 \leqslant s < t$ и $v \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}e^{iv(S_t - S_s)} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathsf{E}e^{iv(S_t-S_s)}\mathbb{1}\{N_s = k\}\mathbb{1}\{N_t - N_s = m\} =$$

$$= \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathsf{E}\exp\{iv\sum_{j=k+1}^{k+m}\eta_j\}P(N_s = k)P(N_t - N_s = m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_s = k)\sum_{m=0}^{\infty}(\phi(v))^m\frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)} = e^{\lambda(t-s)(\phi(v)-1)}. \ \square \quad (5.47)$$

Предположим далее, что

$$\psi(v) = \mathsf{E}e^{v\eta_1} < \infty \ \text{ для } \ v > 0. \quad (5.48)$$

Это условие заведомо выполнено для ограниченных величин η_j, предположение об ограниченности выплат η_j является весьма реалистическим (поскольку $\eta_1 \geqslant 0$ п.н., то, очевидно (5.48) справедливо для $v \leqslant 0$). Вычисления, совершенно аналогичные (5.47), показывают, что при $0 \leqslant s < t$ и $v \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}e^{-v(Y_t - Y_s)} = e^{(t-s)g(v)}, \ \text{ где } \ g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc. \quad (5.49)$$

Из (5.49), принимая во внимание, что $Y_0 = y_0$, получаем, $\mathsf{E}e^{-vY_t} = e^{tg(v) - vy_0}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, соотношения (5.33) и (5.34) выполнены, и по лемме 5.10 для каждого $v \in \mathbb{R}$ процесс $Z_t = e^{-vY_t - tg(v)}$ является мартингалом относительно фильтрации

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} \equiv \sigma\{Y_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Введем момент разорения

$$\tau = \inf\{t > 0 :\ Y_t < 0\} \equiv \inf\{t > 0 :\ Y_t \in (-\infty, 0)\}. \quad (5.50)$$

Поскольку $\{Y_t,\ t \geqslant 0\}$ имеет п.н. непрерывные справа траектории, а множество $(-\infty, 0)$ – открытое, аналогично теореме 4.4 получаем (проверьте в качестве упражнения), что τ есть слабо опциональный момент, т.е. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. В силу замечания Д5.25 ($\nu = 0 \leqslant \tau \wedge t \leqslant t$, очевидно, 0 и $t \wedge \tau$ – слабо опциональные моменты) имеем для $t, v \in \mathbb{R}_+$

$$e^{-vy_0} = \mathsf{E}Z_0 = \mathsf{E}Z_{t\wedge\tau} \geqslant \mathsf{E}\exp\{-vY_{t\wedge\tau} - (t\wedge\tau)g(v)\}\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{E}\exp\{-vY_\tau - \tau g(v)\}\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \geqslant \mathsf{E}e^{-\tau g(v)}\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \geqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant t} e^{-sg(v)}P(\tau < t). \quad (5.51)$$

При получении (5.51) мы учли, что $Y_\tau \leqslant 0$ п.н. Итак, для $v \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$

$$P(\tau \leqslant t) \leqslant e^{-vy_0}\sup_{0\leqslant s\leqslant t} e^{sg(v)}. \quad (5.52)$$

Потребуем теперь, чтобы

$$c > \lambda a, \quad \text{где } a = \mathsf{E}\eta_1 > 0. \tag{5.53}$$

Тогда $g'(v) = \lambda\psi'(v) - c$ и $g'(0) = \lambda a - c < 0$. Кроме того, $g''(v) = \lambda\psi''(v) \geqslant \lambda\mathsf{E}\eta_1^2$ для $v \geqslant 0$, поскольку $\psi''(v) = \mathsf{E}\eta_1^2 e^{v\eta_1}$ (условие $\mathsf{E}\eta_1 > 0$ влечет, что $\mathsf{E}\eta_1^2 > 0$). Следовательно, существует единственное значение $v_0 > 0$, такое, что $g(v_0) = 0$. Выбрав $v = v_0$, из (5.52) получаем $P(\tau \leqslant t) \leqslant e^{-v_0 y_0}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда заключаем, что

$$P(\tau < \infty) \leqslant e^{-v_0 y_0}. \tag{5.54}$$

Итак, доказана

Теорема Д5.27. *Пусть модель Крамера – Лундберга* (1.18) *описывается пуассоновским процессом* (1.17) *интенсивности $\lambda > 0$, величины η_j, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию* (5.48) *и имеет место* (5.53). *Тогда вероятность разорения оценивается с помощью формулы* (5.54), *где y_0 – начальный капитал, а $v_0 > 0$ есть (единственный) корень уравнения $g(v) = 0$, $v \in \mathbb{R}_+$ (функция g введена в* (5.49)*).*

Покажем, как идея обращения естественного направления времени позволяет получить важные результаты. Пусть $(\mathcal{G}_t)_{t\in T\subset\mathbb{R}}$ – *убывающее семейство σ-алгебр* в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т.е. $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}$ при $s < t$, $s, t \in T$. Пусть $(X_t)_{t\in T}$ – действительный случайный процесс, согласованный с $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$. Тогда $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t\in T}$ называется *обратным мартингалом* (*обратным субмартингалом*, *обратным супермартингалом*), если $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t\in U}$ при $U = -T = \{-t, t \in T\}$ является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом). В частности, стохастическая последовательность $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – обратный мартингал, если $\mathsf{E}(X_n|\mathcal{G}_{n+1}) = X_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Записав в последнем равенстве вместо "=" знак "$\geqslant$", получим определение обратного субмартингала (при "$\leqslant$" – обратного супермартингала). Понятие обратного мартингала распространяется и на процессы со значениями в $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$).

Упр. 5.28. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – н.о.р. векторы в $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$) с $\mathsf{E}\|\xi_1\| < \infty$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Положим $X_n = (1/n)\sum_{k=1}^n \xi_k$, $\mathcal{G}_{n,N} = \sigma\{X_n, \ldots, X_N\}$. Докажите, что $(X_n, \mathcal{G}_{n,N})_{1\leqslant n\leqslant N}$ – обратный мартингал.

Упр. 5.29. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность перестановочных действительных величин (т.е. для каждого $N \in \mathbb{N}$ и любой перестановки $(i_1, \ldots, i_N)$ множества $\{1, \ldots, N\}$ имеем $(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_N}) \overset{\mathcal{D}}{=} (\xi_1, \ldots, \xi_N)$). Пусть $m \in \mathbb{N}$ и борелевская функция $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Рассмотрим последовательность *U-статистик* вида

$$U_{n,m} = (C_n^m)^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} g(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}), \ n \geqslant m.$$

Положим $\mathcal{G}_{n,m} = \sigma\{U_{k,m}, k \geqslant n\}$, $n \geqslant m$. Докажите, что $(U_{n,m}, \mathcal{G}_{n,m})_{n\geqslant m}$ – обратный мартингал. Здесь $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$.

Теорема Д5.30. *Пусть $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – обратный субмартингал. Тогда п.н. существует $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \in [-\infty, \infty)$. Если, кроме того, существует*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n = c > -\infty, \tag{5.55}$$

то $X_\infty \in (-\infty, \infty)$ и $X_n \to X_\infty$ в пространстве $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$. Если $X_n \geqslant 0$ п.н. при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathsf{E}X_0^p < \infty$ для некоторого $p \in (1, \infty)$, то $X_n \to X_\infty$ в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$.

□ Для непустого интервала (a, b) и $N \in \mathbb{N}$ пусть $\beta_N(a, b)$ обозначает число пересечений снизу вверх (см. с. ??) полосы мартингалом $(X_N, \mathcal{G}_N), \ldots, (X_0, \mathcal{G}_0)$. Тогда $\mathsf{E}\beta_N(a, b) \leqslant \mathsf{E}(X_0 - a)^+/(b-a)$ по лемме 5.10. Следовательно,

$$\beta_\infty(a, b) := \lim_{N\to\infty} \beta_N(a, b) < \infty \ \text{ п.н.}$$

(предел существует в силу монотонности). Так же, как при доказательстве теоремы 5.11 заключаем, что п.н. существует $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. Теперь заметим, что и $(X_n^+, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является обратным субмартингалом. Поэтому,

$$\mathsf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n^+) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n^+ \leqslant \mathsf{E}X_0^+ < \infty.$$

Отсюда $P(X_\infty = \infty) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть выполнено (5.55). Поскольку $\mathsf{E}X_n \geqslant \mathsf{E}X_{n+1}$, $\mathsf{E}X_n^+ \geqslant \mathsf{E}X_{n+1}^+$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\mathsf{E}|X_n| = 2\mathsf{E}X_n^+ - \mathsf{E}X_n \leqslant 2\mathsf{E}X_n^+ - c \leqslant 2\mathsf{E}X_0^+ - c, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Итак, $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$. **Докажем равномерную интегрируемость** $\{X_n, \, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\mathsf{E}X_n < c + \varepsilon$ при $n \geqslant m$. Тогда для любого $\alpha > 0$ и $n \geqslant m$ (с учетом аналога (5.1) для субмартингала), получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| \geqslant \alpha\} &= \mathsf{E}X_n\mathbb{1}\{X_n \geqslant \alpha\} - \mathsf{E}X_n\mathbb{1}\{X_n \leqslant -\alpha\} = \\ &= \mathsf{E}X_n\mathbb{1}\{X_n \geqslant \alpha\} + \mathsf{E}X_n\mathbb{1}\{X_n \geqslant -\alpha\} - \mathsf{E}X_n \leqslant \\ &\leqslant \mathsf{E}X_m\mathbb{1}\{X_n \geqslant \alpha\} + \mathsf{E}X_m\mathbb{1}\{X_n \geqslant -\alpha\} - c = \\ &= \mathsf{E}|X_m|\mathbb{1}\{|X_n| \geqslant \alpha\} + \mathsf{E}X_m - c \leqslant \mathsf{E}|X_m|\mathbb{1}\{|X_n| \geqslant \alpha\} + \varepsilon < 2\varepsilon\end{aligned}$$

для достаточно больших α (и всех $n \geqslant m$), поскольку $\sup_n P(|X_n| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha^{-1}\mathsf{E}|X_n| \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Осюда видим, что $X_n \to X_\infty$ в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$. А раз $X_\infty \in L^1$, то, очевидно, $|X_\infty| < \infty$ п.н. Если $X_n \geqslant 0$ п.н. для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathsf{E}X_0^p < \infty$ для некоторого $p \in (1, \infty)$, то следствие 5.9, примененное к $X_N, \ldots, X_0$ дает оценку

$$\mathsf{E}(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n^p) \leqslant (p/(p-1))^p\mathsf{E}(X_0^p).$$

Устремив N к бесконечности, получаем $\mathsf{E}(\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n^p) < \infty$. Как и при доказательстве следствия 5.12, имеем $X_n \to X_\infty$ в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$. □

Замечание Д5.31. Условие (5.55) выполнено для любого обратного мартингала.

Следствие Д5.32. *Пусть* $\mathsf{E}|X| < \infty$ *и* $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *– невозрастающая последовательность* σ*-алгебр в* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Положим* $\mathcal{G}_\infty = \cap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$X_n := \mathsf{E}(X|\mathcal{G}_n) \to \mathsf{E}(X|\mathcal{G}_\infty) \ \ \text{п.н. и в} \ \ L^1(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{5.56}$$

□ Очевидно, $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – равномерно интегрируемый обратный мартингал. В силу замечания Д5.31 имеем $X_n \to X_\infty$ п.н. и в L^1 при $n \to \infty$. Легко видеть (поясните), что $X_\infty \in \mathcal{G}_\infty|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда для любого $A \in \mathcal{G}_\infty$ получаем

$$\mathsf{E}X_\infty\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(\mathsf{E}(X\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_n)) = \mathsf{E}X\mathbb{1}_A. \ \square$$

Покажем, как **теорема Леви** (теорема 5.17) **позволяет немедленно вывести закон** 0 **или** 1 **Колмогорова** (теорема 4.11). Пусть $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых векторов в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 1)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k,\, k \leqslant n\}$, $\mathcal{G}_n = \sigma\{\xi_k,\, k \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $A \in \mathcal{G}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$ имеем

$$P(A) = \mathsf{E}\mathbb{1}_A = \mathsf{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) \to \mathsf{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{1}_A \text{ п.н. при } n \to \infty, \tag{5.57}$$

здесь $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k,\, k \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, $P(A)$ равно 0 или 1. Мы учли, что $A \in \mathcal{F}_\infty$, поскольку $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_\infty$ и то, что A не зависит от $\mathcal{F}_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

Взаимно однозначное отображение $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *конечной перестановкой* (пищем $\pi \in \Pi(\mathbb{N})$), если $\pi(n) \neq n$ для не более чем конечного числа (зависящего от π) значений $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность действительных случайных величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ есть $\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ – измеримый случайный элемент (поясните). Положим $\pi\xi = (\xi_{\pi_1}, \xi_{\pi_2}, \dots)$ для перестановки $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ множества $\mathbb{N}$. Определим в $\mathcal{F}$ *σ-алгебру перестановочных событий*

$$\mathcal{G} = \{\xi^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) : P(\xi^{-1}(B)\Delta(\pi\xi)^{-1}(B)) = 0 \text{ для } \pi \in \Pi(\mathbb{N})\}.$$

Теорема Д5.33 (закон 0 или 1 Хьюитта – Сэвиджа). *Пусть $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность н.о.р. величин. Тогда σ-алгебра $\mathcal{G}$ вырождена, т.е. содержит только события вероятности 0 и 1.*

Упр. 5.34. (продолжение упражнения 5.29) По теореме Д5.30 получаем, что

$$U_{n,m} \to U_{\infty,m} \text{ п.н. при } n \to \infty.$$

С помощью теоремы Д5.33 докажите, что если $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность н.о.р. величин, то $U_{\infty,m} = \mathsf{E}g(\xi_1, \dots, \xi_m)$.

Упр. 5.35. Пусть $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – обратный субмартингал, и пусть выполнено условие (5.55). Докажите, что $X_\infty \leqslant \mathsf{E}(X_m|\mathcal{G}_\infty)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, где $\mathcal{G}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$ ($X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ существует п.н. и в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ по теореме Д5.30). Иначе говоря, $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}}$ – обратный субмартингал. Покажите, что если $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – обратный мартингал, то $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}}$ – обратный мартингал.

Упр. 5.36. Можно ли в формулировке теоремы Д5.30 отказаться от условия (5.55)?

Следствие Д5.37 (усиленный закон больших чисел, Колмогоров). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р. векторы со значениями в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 1)$, для которых $\mathsf{E}\xi_1 = a \in \mathbb{R}^m$. Тогда*

$$X_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \to a \quad \text{п.н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \text{при } n \to \infty.$$

□ Без ограничения общности считаем $a = 0 \in \mathbb{R}^m$. В силу упражнения 5.28 $(X_n, \mathcal{G}_{n,N})_{1\leqslant n\leqslant N}$ – обратный (векторный) мартингал, здесь $\mathcal{G}_{n,N} = \sigma\{\xi_n, \dots, \xi_N\}$, $n = 1, \dots, N$. В частности, $X_n = \mathsf{E}(X_1|\mathcal{G}_{n,N})$ п.н. для $n = 1, \dots, N$. По теореме Леви (для каждой компоненты), устремив N к бесконечности, получаем $X_n = \mathsf{E}(X_1|\mathcal{G}_n)$ п.н., где $\mathcal{G}_n = \sigma\{\xi_k,\, k \geqslant n\}$. В силу следствия Д5.32, имеем $\mathsf{E}(X_1|\mathcal{G}_n) \to \mathsf{E}(X_1|\mathcal{G}_\infty)$ п.н. и в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $n \to \infty$, где σ-алгебра $\mathcal{G}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$ вырождена по закону 0 или 1 Колмогорова (5.57). Следовательно, $\mathsf{E}(X_1|\mathcal{G}_\infty) = 0$ п.н. □

Теорема Д5.38 (Блэкуэл и Дуббинс). *Пусть $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность действительных случайных величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ таких, что $X_n \to X_\infty$ п.н. при $n \to \infty$ и $\mathsf{E}(\sup_n |X_n|) < \infty$. Пусть $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – семейство σ-алгебр в $\mathcal{F}$, которые либо возрастают, либо убывают (соответственно положим $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ или $\mathcal{F}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$). Тогда*

$$\lim_{n,k\to\infty}\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k) = \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty) \quad \text{п.н. и в} \quad L^1(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{5.58}$$

□ Обозначим

$$U = \lim_{m\to\infty} \sup_{k,n\geqslant m} \mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k),\ \ V = \lim_{m\to\infty} \inf_{k,n\geqslant m} \mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k)$$

(пределы U и V существуют п.н. в силу монотонности последовательностей $\{\sup\limits_{k,n\geqslant m} \mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k)\}$ и $\{\inf\limits_{k,n\geqslant m} \mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k)\}$). Пусть $Y_m = \sup\limits_{n\geqslant m} X_n$, $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\mathsf{E}|Y_n| \leqslant \mathsf{E}(\sup_n |X_n|) < \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, при каждом $m \in \mathbb{N}$ по теореме 5.16 или следствию Д5.32

$$\mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_k) \to \mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_\infty) \ \text{ п.н. и в } L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \ \text{ при } k\to\infty. \tag{5.59}$$

Поскольку $X_n \leqslant Y_m$ при $n \geqslant m$, то $\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}_k) \leqslant \mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_k)$ п.н. для $n \geqslant m$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (5.59) получаем

$$U \leqslant \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geqslant m} \mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_k) \leqslant \limsup_{m\to\infty} \mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_\infty) \ \text{ п.н.}$$

Из того, что $Y_m \downarrow X_\infty$, имеем $\mathsf{E}(Y_m|\mathcal{F}_\infty) \downarrow \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty)$ п.н. при $m \to \infty$ (поясните). Аналогично доказывается, что $V \geqslant \mathsf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty)$. Поэтому $U = V$ п.н. Докажите самостоятельно L^1-сходимость в (5.58). □

Исследованию множества сходимости субмартингалов посвящен §5, гл. 7 [?]. Приведем один результат такого рода, не вошедший в упомянутую книгу.

Теорема Д5.39 ([?, с. ??]). *Пусть $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – квадратично интегрируемый мартингал и $\{A_n\}$ – его квадратическая характеристика. Положим $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$. Тогда $\{X_n\}$ сходится п.н. на множестве $\{A_\infty < \infty\}$ и $X_n = o(f(A_n))$ при $n \to \infty$ на этом множестве для любой функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условию*

$$\int_0^\infty (1+f(t))^{-2} dt < \infty$$

(в частности, для функции $f(t) = t^{1/2}(\log^+ t)^\alpha$, где $\alpha > 1/2$).

Покажем, как **теорема** Д5.38 **может применяться для процессов с непрерывным временем**, для чего выполним элементарные упражнения.

Упр. 5.40. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – неубывающий поток σ-алгебр (необязательно полных) в полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Тогда $\overline{\mathcal{F}}_{t+} = \overline{\mathcal{F}_{t+}}$, т.е. **операции пополнения и замыкания фильтрации по непрерывности перестановочны**.

□ Очевидно, $\mathcal{F}_t \subset \overline{\mathcal{F}}_t$, поэтому $\mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}}_{t+}$ и $\overline{\mathcal{F}_{t+}} \subset \overline{\overline{\mathcal{F}}_{t+}} = \overline{\mathcal{F}}_{t+}$ (т.к. все $\overline{\mathcal{F}}_t$ содержат $\mathcal{N}$ – совокупность событий нулевой вероятности, то $\overline{\mathcal{F}}_{t+}$ содержит $\mathcal{N}$).

Обратно. $\mathcal{F}_{t+} \subset \mathcal{F}_{t+h}$ для любого $h > 0$. Следовательно, $\overline{\mathcal{F}_{t+}} \subset \overline{\mathcal{F}}_{t+h}$, откуда $\overline{\mathcal{F}_{t+}} \subset \overline{\mathcal{F}}_{t+}$. □

Говорят, что мартингал (субмартингал) $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ удовлетворяет *обычным условиям*, если фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ полна и непрерывна справа.

Упр. 5.41. Пусть $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – субмартингал (мартингал) имеющий п.н. непрерывные справа траектории. Пусть для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta = \delta(t) > 0$ такое, что $\mathsf{E}(\sup_{s\in[t,t+\delta]} |X_s|) < \infty$ (поясните, почему $\sup_{s\in[t,t+\delta]} |X_s|$ есть случайная величина). Тогда $(X_t,\overline{\mathcal{F}}_{t+})$ – субмартингал (мартингал).

□ В силу леммы 5.4 и упражнения 5.40 можно сразу считать $\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим $0 \leqslant s < t$ и возьмем произвольные последовательности $s_m \downarrow s$ при $m \to \infty$ и $t_n \downarrow t$ при $n \to \infty$ такие, что $s_m < t$ для $m \in \mathbb{N}$ и $t_n < t + \delta(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, по теореме Д5.38

$$\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_{s+}) = \lim_{m,n\to\infty} \mathsf{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_{s_m}) \geqslant (=) \lim_{m\to\infty} X_{s_m} = X_s \ \text{ п.н.}, \tag{5.60}$$

в (5.60) знак (=) относится к случаю мартингалов. □

Упр. 5.42. Убедитесь, что условия предыдущего упражнения выполнены для винеровского и пуассоновского процессов (напомним, что траектории винеровского процесса п.н. непрерывны, а траектории пуассоновского процесса п.н. непрерывны справа).

В связи с тремя последними упражнениями приведем следующий **фундаментальный результат**.

Теорема Д5.43 (см. [?, с. 16]). *Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – субмартингал и фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ удовлетворяет обычным условиям. Тогда процесс X имеет модификацию с траекториями, непрерывными справа, тогда и только тогда, когда функция $t \mapsto \mathsf{E}X_t$ из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}$ непрерывна справа. Если эта непрерывная справа модификация Y_t, $t \in \mathbb{R}_+$, существует, то она может быть выбрана так, что будет иметь в каждой точке $t \in (0,\infty)$ предел слева (говорят, что процесс типа cadlag или RCLL) и будет согласована с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. При этом $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – субмартингал.*

В заключение этого раздела упомянем, что имеются различиные обобщения мартингального свойства (понятия локального мартингала, демимартингала, семимартингала, миксингала и др., см. [?], [?, ?], [?]). О мартингалах с многопараметрическим индексом см. монографию [?].

Лекция 6. Слабая сходимость случайных элементов

Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость с.э. по распределению. Критерий слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений. Слабая сходимость мер в $C(T,\mathcal{X})$. Относительная слабая компактность и плотность семейства мер. Формулировка теоремы Прохорова. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова. Многомерная ЦПТ Линдеберга (формулировка), лемма о максимуме сумм независимых случайных величин. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс.

В этой лекции (и в дополнении к ней) **мы затронем очень глубокий круг вопросов, связанных с аппроксимацией одних процессов другими**.

Начнем с понятия слабой сходимости мер. Пусть $(\mathcal{X},\rho)$ — метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и Q_n, Q — меры на $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Говорят, что меры Q_n, $n\in\mathbb{N}$, *слабо сходятся* к мере Q (обозначается $Q_n\Rightarrow Q$), если для любой $f\in C_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$, т. е. непрерывной ограниченной функции $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{R}$,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f(x)Q_n(dx)\to\int\limits_{\mathcal{X}} f(x)Q(dx),\quad n\to\infty, \tag{6.1}$$

(равносильное определение получится, если брать $f\in C_b(\mathcal{X},\mathbb{C})$, т. е. непрерывные ограниченные $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{C}$; вместо последовательности мер можно рассматривать сети, т.е. семейства, индексированные направленной переменной, например, Q_ε, $\varepsilon>0$). **Интеграл функции** f **по мере** Q (когда он определен) **будем обозначать также** $\langle f,Q\rangle$.

Если слабый предел существует, то он единственен, как показывает

Лемма 6.1. *Пусть $\langle f,Q\rangle=\langle f,\widetilde{Q}\rangle$ для всех $f\in C_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$. Тогда $Q=\widetilde{Q}$.*

□ Пользуясь рассуждениями, приведенными после формулы (4.15), видим, что $Q(F)=\widetilde{Q}(F)$ для всех замкнутых F. В силу леммы 2.3 получаем, что $Q=\tilde{Q}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. □

Теорема 6.2. *Пусть Q,Q_n, $n\in\mathbb{N}$, — меры на метрическом пространстве $(\mathcal{X},\rho)$. Тогда соотношение $Q_n\Rightarrow Q$ $(n\to\infty)$ равносильно каждому из следующих:*

1°. $\limsup\limits_{n\to\infty} Q_n(F)\leqslant Q(F)$ *для любого замкнутого* $F\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$;

2°. $\liminf\limits_{n\to\infty} Q_n(G)\geqslant Q(G)$ *для любого открытого* $G\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$;

3°. $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(B)=Q(B)$ *для любого* $B\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *такого, что* $Q(\partial B)=0$,

где ∂B — граница множества B (∂B замкнуто и поэтому входит в $\mathcal{B}(\mathcal{X})$). Множества B, фигурирующие в условии 3°, называются Q-непрерывными множествами.

□ Прежде всего заметим, что **исходное определение** (6.1) **равносильно тому, что для любой** $f\in C_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f,Q_n\rangle\leqslant\langle f,Q\rangle. \tag{6.2}$$

Действительно, заменив в (6.2) f на $-f$, получим $\liminf\limits_{n\to\infty}\langle f,Q_n\rangle\geqslant\langle f,Q\rangle$.

Пусть $Q_n\Rightarrow Q$. **Докажем утверждение** 1°. Для замкнутого F и произвольного $\varepsilon>0$ возьмем $f_\varepsilon^F(x)=\varphi(\rho(x,F)/\varepsilon)\in C_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$, где $\varphi(t)=1$ при $t\leqslant 0$, $\varphi(t)=1-t$

при $0 < t < 1$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Тогда $Q_n(F) = \langle \mathbb{1}_F, Q_n\rangle \leqslant \langle f_\varepsilon^F, Q_n\rangle$, поскольку $\mathbb{1}_F \leqslant f_\varepsilon^F$ (индикатор определен формулой (1.15)). В силу (6.2)

$$\limsup_{n\to\infty} Q_n(F) \leqslant \limsup_{n\to\infty}\langle f_\varepsilon^F, Q_n\rangle \leqslant \langle f_\varepsilon^F, Q\rangle.$$

Остается учесть, что по теореме Лебега $\langle f_\varepsilon^F, Q\rangle \to \langle \mathbb{1}_F, Q\rangle = Q(F)$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть выполнено 1°. **Докажем, что** $Q_n \Rightarrow Q$. Неравенство (6.2) достаточно проверить при дополнительном условии $0 < f(x) < 1$, выполнения которого можно добиться линейным преобразованием $af(x)+b$, где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Возьмем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим замкнутые множества $F_i = \{x\colon\ f(x) \geqslant i/k\}$, $i = 0, \dots, k$. Обозначим $C_i = \left\{\dfrac{i-1}{k} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{k}\right\}$, т. е. $C_i = F_{i-1} \setminus F_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} Q(C_i) \leqslant \int\limits_{\mathcal{X}} f(x) Q(dx) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} Q(C_i). \tag{6.3}$$

Теперь заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{i}{k} Q(C_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{i}{k}(Q(F_{i-1}) - Q(F_i)) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} Q(F_i)$. Аналогичное преобразование суммы в левой части (6.3) дает

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q(F_i) \leqslant \int\limits_{\mathcal{X}} f(x) Q(dx) \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q(F_i). \tag{6.4}$$

Записав неравенство вида (6.4) и для Q_n, получим

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f, Q_n\rangle \leqslant \frac{1}{k} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q_n(F_i) \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q(F_i) \leqslant \frac{1}{k} + \langle f, Q\rangle.$$

Учитывая произвольность k, приходим к (6.2). Следовательно, $Q_n \Rightarrow Q$.

Эквивалентность условий 2° **и** 1° **очевидна** (следует перейти к дополнениям).

Покажем, что условие 1° **влечет** 3°. Обозначим B° внутренность множества B, а $[B]$ — его замыкание. Тогда, применив 1° и 2°, имеем

$$\begin{aligned} Q([B]) \geqslant \limsup_{n\to\infty} Q_n([B]) \geqslant \limsup_{n\to\infty} Q_n(B) \geqslant \\ \geqslant \liminf_{n\to\infty} Q_n(B) \geqslant \liminf_{n\to\infty} Q_n(B^\circ) \geqslant Q(B^\circ). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Но $Q([B]) = Q(B) = Q(B^\circ)$, поскольку $Q(\partial B) = 0$ ($[B] \setminus B \in \partial B$ и $B \setminus B^\circ \in \partial B$), поэтому из (6.5) следует условие 3°.

Пусть выполнено условие 3°, **покажем, что верно** 1°. Возьмем замкнутое множество F и рассмотрим $F^\varepsilon = \{x \in \mathcal{X}\colon\ \rho(x, F) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$. Заметим, что $\partial F^\varepsilon \subset \{x\colon\ \rho(x, F) = \varepsilon\}$, поэтому $\partial F^\varepsilon \cap \partial F^\delta = \varnothing$ при $\varepsilon \neq \delta$. Итак, $Q(\partial F^\varepsilon) > 0$ не более чем для счетного множества ε. Поэтому выберем последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$ такую, что $Q(\partial F^{\varepsilon_k}) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\limsup\limits_{n\to\infty} Q_n(F) \leqslant \lim_{n\to\infty} Q_n(F^{\varepsilon_k}) = Q(F^{\varepsilon_k})$ для любого k. Остается учесть, что $Q(F^{\varepsilon_k}) \to Q(F)$ при $k \to \infty$. □

Пусть заданы вероятностные пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и с.э. $X\colon \Omega \to \mathcal{X}$ и $X_n\colon \Omega_n \to \mathcal{X}$, т. е. соответственно $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{F}_n\,|\,\mathcal{B}(\mathcal{X})$-измеримые отображения. С.э. X_n называются *сходящимися по распределению* к X (пишут

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), если $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ при $n \to \infty$ (см. (1.5)). Пользуясь (2.10), видим, что $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{E}_n f(X_n) \to \mathsf{E} f(X)$$

для любой $f \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ (можно брать $f \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{C})$). Здесь E_n обозначает математическое ожидание по мере P_n.

Теорема 6.3. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ — метрические пространства и h — непрерывное отображение $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Если $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ (X_n, X принимают значения в $\mathcal{X}$), то*

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X), \quad n \to \infty. \tag{6.6}$$

Эквивиалентная формулировка: если $Q_n \Rightarrow Q$ на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, то $Q_n h^{-1} \Rightarrow Q h^{-1}$ на $\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ при $n \to \infty$.

□ Возьмем непрерывную и ограниченную функцию $g \colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$. Тогда $g \circ h \in \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ как суперпозиция непрерывной функции и ограниченной непрерывной. Следовательно, $\mathsf{E} g(h(X_n)) \to \mathsf{E} g(h(X))$, $n \to \infty$, что доказывает (6.6).

По лемме 1.6 определены с.э. X_n, X, такие что $Q_n = P_{X_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $Q = P_X$. Теперь заметим, что

$$Q_n h^{-1} = P_{h(X_n)}, \quad Q h^{-1} = P_{h(X)}. \ \square$$

Лемма 6.4. *$Q_n \Rightarrow Q$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда из каждой последовательности $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ можно извлечь подпоследовательность $\{n'_k\}$ такую, что $Q_{n'_k} \Rightarrow Q$ при $k \to \infty$.*

□ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Допустим, что выполнено утверждение о подпоследовательностях, но $Q_n \not\Rightarrow Q$ при $n \to \infty$. Тогда существуют $f \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ и $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$|\langle f, Q_{m_k} \rangle - \langle f, Q \rangle| > \varepsilon \ \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Видим, что невозможно найти $\{m'_k\} \subset \{m_k\}$ такую, что $Q_{m'_k} \Rightarrow Q$ при $k \to \infty$. Пришли к противоречию. □

Семейство мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности Q_{α_n} ($n \in \mathbb{N}$) можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $Q_{\alpha'_n}$ (сходящуюся необязательно к элементу этого семейства). Очевидно, любая слабо сходящаяся последовательность является слабо относительно компактной. Легко построить (возьмите две последовательности, слабо сходящиеся к разным пределам, и составьте из них одну) слабо относительно компактную последовательность, не имеющую слабого предела. Полную связь между двумя этими понятиями раскрывает

Теорема 6.5. *Для того, чтобы последовательность мер $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ имела слабый предел, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была относительно компактной и при этом нашелся такой класс функций $\mathcal{H} \subset C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, что*

1) существует $\lim_{n \to \infty} \langle h, Q_n \rangle$ при каждом $h \in \mathcal{H}$,

2) для любых мер Q и $\widetilde{Q}$ на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ соотношение

$$\langle h, Q \rangle = \langle h, \widetilde{Q} \rangle \ \text{при всех } h \in \mathcal{H} \tag{6.7}$$

влечет $Q = \widetilde{Q}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

$\square$ Необходимость очевидна (возьмем $\mathcal{H} = C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ и воспользуемся леммой 6.1).

Достаточность. Из произвольной последовательности $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ выберем подпоследовательность $\{n'_k\}$ такую, что $Q_{n'_k} \Rightarrow Q$ при $k \to \infty$. Тогда $\langle f, Q_{n'_k}\rangle \to \langle f, Q\rangle$ для всех $f \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, и в силу условия 1) видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \langle h, Q_n\rangle = \langle h, Q\rangle \ \text{ при каждом } h \in \mathcal{H}. \tag{6.8}$$

Допустим, что $Q_n \not\Rightarrow Q$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме 6.4 найдется последовательность $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $Q_{m_k} \Rightarrow \widetilde{Q}$ при $k \to \infty$ и $\widetilde{Q} \neq Q$. Из 6.8 вытекает, что $\langle h, Q\rangle = \langle h, \widetilde{Q}\rangle$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Согласно условию 2) имеем $Q = \widetilde{Q}$. Пришли к противоречию. $\square$

Рассмотрим теперь процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ и $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in T\}$, $n \in \mathbb{N}$, заданные на некоторых $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ и принимающие при каждом $t \in T$ значения в польском пространстве $\mathcal{X}_t$. Согласно теореме 1.4 имеем $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_T$ и $X^{(n)} \in \mathcal{F}_n|\mathcal{B}_T$, $n \in \mathbb{N}$. Естественно было бы определить слабую сходимость процессов $X^{(n)}$ к X как слабую сходимость их распределений на $\mathcal{B}_T$, однако **слабая сходимость введена для мер на борелевской σ-алгебре метрического** (можно и топологического) **пространства. В общем случае нельзя утверждать, что $\mathcal{X}_T$ допускает метризацию, при которой $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}(\mathcal{X}_T)$.** В некоторых случаях эту трудность можно преодолеть, учитывая, что траектории изучаемых процессов лежат (с вероятностью 1) в определенном собственном подмножестве пространства $\mathcal{X}_T$.

В частности, пусть T – локально компактное метрическое пространство и $C(T, \mathcal{X})$ – пространство непрерывных функций на T со значениями в польском пространстве $\mathcal{X}$ (при каждом $t \in T$), снабженное топологией равномерной сходимости на компактах, т.е. метрикой ρ_C вида (3.20). Обозначим $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$ борелевскую σ-алгебру в $(C(T, \mathcal{X}), \rho_C)$. Пусть $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$ – цилиндрическая σ-алгебра в $C(T, \mathcal{X})$, т.е. σ-алгебра, порожденная "непрерывными цилиндрами" вида $\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B)$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}^k)$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$ (в пространстве $\mathcal{X}^k$ берется метрика типа (2.1)), а отображение $\pi_{t_1,\dots,t_k} : C(T, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}^k$ задается формулой

$$\pi_{t_1,\dots,t_k} x = (x(t_1), \dots, x(t_k)), \ x \in C(T, \mathcal{X}). \tag{6.9}$$

Теорема 6.6. *Пусть $C(T, \mathcal{X})$ – введенное выше пространство. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X})) = \mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$,

b) если у мер $Q, \widetilde{Q}$, заданных на $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$ совпадают все конечномерные распределения, т.е.

$$Q\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} = \widetilde{Q}\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \quad \text{для } t_1, \dots, t_k \in T, \ k \in \mathbb{N}, \tag{6.10}$$

то $Q = \widetilde{Q}$ на $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$,

c) последовательность мер $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$ имеет слабый предел при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда она относительно компактна и существуют слабые пределы у всех конечномерных распределений, т.е. при каждых $t_1, \dots, t_k \in T$ и $k \in \mathbb{N}$ последовательность $Q_n\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет слабый предел.

$\square$ a) $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X})) \subset \mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$ в силу замечания 2.2 и леммы 3.9, при доказательстве которой было установлено, что любой замкнутый шар входит в $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$. С другой стороны, любой "непрерывный цилиндр" принадлежит $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$ согласно следствию 1.2 с учетом непрерывности отображений $\pi_{t_1,\dots,t_k}$ при всех $t_1, \dots, t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X})) \subset \mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))$.

b) Если Q и $\widetilde{Q}$ совпадают на алгебре "непрерывных цилиндров" в $C(T, \mathcal{X})$, то они совпадают на порожденной ими σ-алгебре $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$, а значит, по доказанному пункту a) и на $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$.

c) Необходимость вытекает из теоремы 6.3 и непрерывности отображений (6.9). Для доказательства достаточности рассмотрим класс функций

$$\mathcal{H} = \{h = g_k \circ \pi_{t_1,\dots,t_k}, \ \text{ где } g_k \in C_b(\mathcal{X}^k, \mathbb{R}),\ t_1, \dots, t_k \in T,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Согласно формуле (2.10) для $h = g_k \circ \pi_{t_1,\dots,t_k} \in \mathcal{H}$ имеем

$$\langle h, Q_n \rangle = \langle g_k, Q_n \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \rangle. \tag{6.11}$$

Слабая сходимость $\{Q_n \pi_{t_1,\dots,t_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ в силу (6.11) обеспечивает выполнение условия 1) теоремы 6.5. Установим справедливость условия 2) теоремы 6.5. Та же формула (6.11) записанная для произвольных мер Q, $\widetilde{Q}$ вместо Q_n, и лемма 6.1 показывают, что имеет место (6.10). Значит, по доказанному в пункте b) $Q = \widetilde{Q}$ на $\mathcal{B}_T(C(T, \mathcal{X}))$. $\square$

Итак, **сходимость по распределению случайных элементов в $C(T, \mathcal{X})$ влечет слабую сходимость их к.-м.р. Однако обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.**

Пример 6.7. Пусть мера Q_n сосредоточена на функции $x_n(\cdot) \in C[0,1]$, изображенной на рис. 6.1, т. е. $Q_n = \delta_{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ («дельта-мера» $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$). Положим $X_n(t, \omega) = x_n(t)$ для всех $\omega \in \Omega = C[0,1]$, $t \in [0,1]$ ($\mathcal{F} = \mathcal{B}(C[0,1])$); тогда $Q_n = P_{X_n}$.

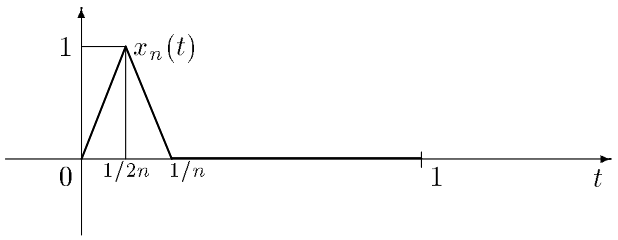

Рис. 6.1

Легко видеть, что для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, $k \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$

$$\delta_{x_n} \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B) = \delta_{x_n}\{\omega \in C[0,1]\colon \ (\omega(t_1), \dots, \omega(t_k)) \in B\} = \mathbb{1}_B(x_n(t_1), \dots, x_n(t_k)).$$

При всех достаточно больших n имеем $x_n(t_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому при этих n $\mathbb{1}_B(x_n(t_1), \dots, x_n(t_k)) = \mathbb{1}_B(0, \dots, 0) = \delta_{x_0} \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}(B)$, где $x_0(t) = 0$, $t \in [0,1]$. Если бы существовала мера Q, такая что $\delta_{x_n} \Rightarrow Q$ (единственность Q следовала бы из леммы 6.1), то для всех $k \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_k \in T$

$$Q_n \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Rightarrow Q \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k}, \ n \to \infty.$$

Но тогда в силу пункта b) теоремы 6.6 получаем, что $Q = \delta_{x_0}$. Возьмем в $C[0,1]$ замкнутое множество $F = \{x(\cdot) : \sup_{t \in [0,1]} x(t) \geqslant 1\}$. Очевидно, $\delta_{x_0}(F) = 0$ и $\delta_{x_n}(F) = 1$ для $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 6.2 (пункт 1°) соотношение $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$ при $n \to \infty$ невозможно.

Оказывается, **с относительной компактностью семейства мер связано понятие плотности**. Семейство мер $\{Q_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ на метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ называется *плотным*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти компакт K_ε, такой что $Q_\alpha(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ при всех $\alpha \in \Lambda$.

Приведем следующий замечательный результат (его доказательство дано в приложении 3).

Теорема 6.8 (Прохоров). *Если семейство мер плотно, то оно слабо относительно компактно. Если пространство $\mathcal{X}$ польское, то слабо относительно компактное семейство мер является плотным.*

Пусть далее $T = [0, 1]$. Пространство $C[0, 1]$ является польским, поэтому для доказательства слабой сходимости требуется уметь проверять плотность семейства мер в этом пространстве.

Для функции $x:\ [0, 1] \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ определим *модуль непрерывности*

$$\Delta(x, \delta) = \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ |s-t|<\delta}} |x(s) - x(t)|.$$

Из теоремы Арцела – Асколи, описывающей компакты в $C[0, 1]$ (см., напр., [**?**, с. 302]), немедленно вытекает

Теорема 6.9. *Семейство мер $\{Q_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ в $C[0, 1]$ плотно тогда и только тогда, когда одновременно имеем*

1°. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $M = M(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$Q_n(x(\cdot)\colon\ |x(0)| \geqslant M) \leqslant \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2°. *Для любых $\varepsilon, \nu > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon, \nu, \delta)$ такое, что*

$$Q_n(x(\cdot)\colon\ \Delta(x, \delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \nu \quad \textit{для всех} \quad n \geqslant m_0.$$

Замечание 6.10. Вместо проверки условия 2° бывает удобнее проверить обеспечивающее его условие

2′. Для любых $\varepsilon, \nu > 0$ существует $N(\varepsilon, \nu) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{N} Q_n\left(\sup_{\frac{i-1}{N}\leqslant s\leqslant \frac{i}{N}} \left|x(s) - x\left(\frac{i-1}{N}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \nu \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon, \nu, N).$$

Теперь мы покажем, что **случайные ломаные, построенные по независимым случайным величинам, в определенном смысле могут быть близки к винеровскому процессу.**

Начнем с необходимых уточнений. Пусть $X_{n,i}$, $i = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbb{N}$, — независимые в каждой n-й серии случайные величины такие, что $\mathsf{E}X_{n,i} = 0$, $i = 1, \dots, m_n$, и $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \sigma^2_{n,i} = 1$, где $\sigma^2_{n,i} = \mathsf{E}X^2_{n,i}$. Если $Y_{n,i}\,(i = 1, \dots, m_n)$ — независимые величины с конечными дисперсиями и хотя бы одна из этих величин невырожденна, то к указанной схеме можно перейти нормировкой, положив $X_{n,i} = (Y_{n,i} - \mathsf{E}Y_{n,i})/B_n$, $B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{m_n} \mathsf{D}Y_{n,i}$.

Обозначим $t_{n,0} = 0$, $t_{n,j} = \sum\limits_{i=1}^{j} \sigma^2_{n,i}$ (тогда $t_{n,k_n} = 1$), $S_{n,0} = 0$, $S_{n,j} = \sum\limits_{i=1}^{j} X_{n,i}$, $j = 1, \dots, m_n$. **Определим при каждом $\omega \in \Omega$ функцию $S_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$, как непрерывную ломаную с узлами** $(t_{n,j}, S_{n,j})$, $j = 0, \dots, m_n$, т. е.

$$S_n(t, \omega) = S_{n,i-1} + \frac{(t - t_{n,i-1})}{t_{n,i} - t_{n,i-1}} X_{n,i} \quad \text{при} \quad t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}] \tag{6.12}$$

(см. рис. 6.2). Здесь и далее будем считать, что все $\sigma_{n,i} > 0$, иначе говоря, мы исключаем из рассмотрения $X_{n,i} = 0$ п.н. Формула (6.12) показывает, что $S_n(t, \omega)$ при каждом $t \in [0, 1]$ является случайной величиной, а так как траектории $S_n(\cdot, \omega)$ непрерывны при всех $\omega \in \Omega$, то по лемме 3.9 $S_n(\cdot)$ — с.э. в пространстве $C[0, 1]$. Пусть $P_n = P_{S_n(\cdot)}$ на $\mathcal{B}(C[0, 1])$.

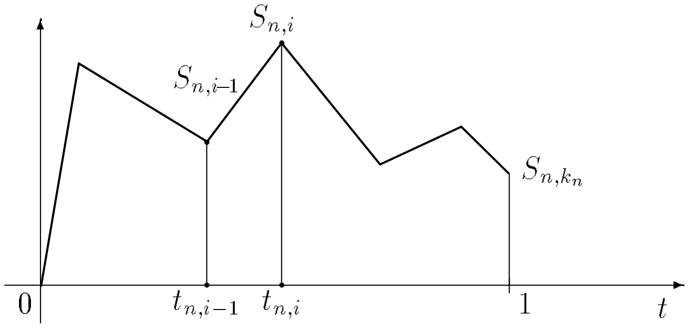

Рис. 6.2

Теорема 6.11 (Прохоров). *Пусть для описанных выше величин $X_{n,i}$, $i = 1, \ldots, m_n$, $n \in \mathbb{N}$, выполнено условие Линдеберга:*

$$\sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E} X_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,i}|>\varepsilon\}} \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6.13}$$

Тогда $P_n \Rightarrow \mathbb{W}$ $(n \to \infty)$, где $\mathbb{W}$ — мера Винера. Другими словами, $S_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ при $n \to \infty$, где W — винеровский процесс.

Прежде чем доказывать этот результат, сделаем некоторые замечания. Для н.о.р. величин $X_1, X_2, \ldots$ с нулевым средним и единичной дисперсией Донскер исследовал случайные ломаные с узлами $(i/n, S_i/\sqrt{n})$, $i = 0, \ldots, n$. Утверждение $S_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(\cdot)$ называют *принципом инвариантности Донскера–Прохорова.* Подчеркнем, что **теорема 6.11 включает в себя обычную центральную предельную теорему** (для серий независимых величин в условиях Линдеберга). Действительно, функционал $h(x(\cdot)) = x(1)$ — это непрерывное отображение $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$. Поэтому согласно теореме 6.3 имеем при $n \to \infty$

$$h(S_n(\cdot)) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(W(\cdot)), \quad \text{т. е.} \quad S_n(1) = S_{n,m_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} W(1) \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{6.14}$$

Это рассуждение объясняет, почему теорему 6.12 называют также *функциональной центральной предельной теоремой.* Кроме того, оно разъясняет и происхождение термина принцип инвариантности (в слабой форме, т. к. речь идет о слабой сходимости). **Инвариантность состоит в том, что предельное распределение $h(S_n(\cdot))$ будет таким же, как у $h(W(\cdot))$, какие бы серии независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга, мы ни брали, при этом h может быть любым непрерывным отображением, заданным на $C[0,1]$.** Таким образом, для нахождения распределения функционала от броуновского движения можно исследовать этот функционал от случайных ломаных, построенных по простым независимым случайным величинам, удовлетворяющим условию Линдеберга. Например, можно рассматривать независимые величины Y_n, принимающие значения -1 и $+1$ с вероятностью $1/2$ (случайное блуждание), и от них переходить к схеме серий: $X_{n,i} = Y_i/\sqrt{n}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

□ Для доказательства теоремы 6.11 воспользуемся теоремой 6.6. **Проверим сходимость к.-м.р.** $S_n(\cdot)$. Покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$ выполнено $P_n \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow W \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$ $(n \to \infty)$, или, что то же самое,

$$(S_n(t_1), \ldots, S_n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W(t_1), \ldots, W(t_k)).$$

Для каждой точки t_j, $j = 1, \ldots, k$, при каждом n найдем ближайшую к ней слева точку среди $t_{n,i}$, $i = 1, \ldots, m_n$, т. е. $t_j^{(n)} = \max\limits_{i=1,\ldots,m_n} \{t_{n,i} \leqslant t_j\}$. Из условия

Линдеберга вытекает (более общий результат объяснен в приложении 2), что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m_n} \sigma^2_{n,i} \to 0, \quad n\to\infty, \tag{6.15}$$

поэтому $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m_n}(t_{n,i}-t_{n,i-1})\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $t_j^{(n)}\to t_j$ при $n\to\infty$ для каждого $j=1,\dots,k$. Если $t_j^{(n)}=t_{n,l}$, $l=l(j,n)$, то $|S_n(t_j)-S_n(t_j^{(n)})|\leqslant$ $\leqslant |S_n(t_{n,l+1})-S_n(t_{n,l})|\leqslant |X_{n,l}|$. В силу (6.15) имеем $S_n(t_j)-S_n(t_j^{(n)})\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$ для $j=1,\dots,k$. Таким образом, **достаточно установить, что**

$$Z_n:=(S_n(t_1^{(n)}),\dots,S_n(t_k^{(n)}))\xrightarrow{\mathcal{D}} Z:=(W(t_1),\dots,W(t_k)), \quad n\to\infty. \tag{6.16}$$

Действительно, нетрудно проверить, что если Z_n, Y_n, Z — случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^k$, такие что $Z_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Z$, а $Y_n\xrightarrow{P}0$ (т. е. сходятся по вероятности к нулю все компоненты Y_n), то $Z_n+Y_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Z$ (примените пункт 1° теоремы 6.2).

Для доказательства (6.16) **воспользуемся многомерной центральной предельной теоремой** (ее доказательство дано в приложении 2).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$ случайные векторы $\xi_{n,i}$, $i=1,\dots,m_n$, независимые в каждой n-й серии ($n\in\mathbb{N}$), такие что $\mathsf{E}\xi_{n,i}=0$ и $\mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2<\infty$ для всех n,i, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^k$. Обозначим $B_{n,i}^2=\mathsf{D}\xi_{n,i}$ дисперсионные матрицы, т. е. матрицы из ковариаций компонент $\xi_{n,i}$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{m_n}\xi_{n,i}$, $B_n^2=\mathsf{D}S_n=\sum\limits_{i=1}^{m_n}B_{n,i}^2$.

Теорема 6.12 (Линдеберг). *Пусть для описанных векторов* $\xi_{n,i}$

$$B_n^2\to B^2 \ \ \textit{(поэлементно) при} \ \ n\to\infty, \tag{6.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2\mathbb{1}_{\{\|\xi_{n,i}\|>\varepsilon\}}\to 0 \ \textit{ для любого } \ \varepsilon>0 \ \ \textit{при} \ \ n\to\infty. \tag{6.18}$$

Тогда

$$S_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}(0,B), \ \ n\to\infty. \tag{6.19}$$

Заметим, что $\mathrm{cov}(S_n(t_i^{(n)}),S_n(t_j^{(n)}))=\min\{t_i^{(n)},t_j^{(n)}\}\to\min\{t_i,t_j\}$ при $n\to\infty$ $(i,j=1,\dots,k)$. Поэтому для Z_n и Z, фигурирующих в (6.16), получаем, что $\mathsf{D}Z_n\to\mathsf{D}Z$ поэлементно. Далее, если $t_1^{(n)}=t_{n,l_1}$, …, $t_k^{(n)}=t_{n,l_k}$, где $l_i=l_i(n)\in$ $\in\{1,\dots,m_n\}$, то $Z_n=\xi_{n,1}+\ldots+\xi_{n,l_k}$, где $\xi_{n,i}$, $i=1,\dots,l_k(n)$, — независимые случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^k$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}S_n(t_1^{(n)})\\ S_n(t_2^{(n)})\\ \vdots\\ S_n(t_k^{(n)})\end{pmatrix}}_{Z_n}=\underbrace{\begin{pmatrix}X_{n,1}\\ X_{n,1}\\ \vdots\\ X_{n,1}\end{pmatrix}}_{\xi_{n,1}}+\ldots+\underbrace{\begin{pmatrix}X_{n,l_1}\\ X_{n,l_1}\\ \vdots\\ X_{n,l_1}\end{pmatrix}}_{\xi_{n,l_1}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ X_{n,l_1+1}\\ \vdots\\ X_{n,l_1+1}\end{pmatrix}}_{\xi_{n,l_1+1}}+\ldots+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ X_{n,l_k}\end{pmatrix}}_{\xi_{n,l_k}}.$$

Пользуясь тем, что у каждого вектора $\xi_{n,i}$ все компоненты (кроме части из них, возможно равной нулю) равны $X_{n,i}$, получим в силу (6.13)

$$\sum_{i=1}^{l_k(n)}\mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2\mathbb{1}_{\{\|\xi_{n,i}\|>\varepsilon\}}\leqslant k\sum_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}|X_{n,i}|^2\mathbb{1}_{\{|X_{n,i}|>\varepsilon/\sqrt{k}\}}\to 0.$$

Итак, сходимость к.-м.р. установлена. **Проверим плотность** $\{P_n\}$. Для этого понадобится

Лемма 6.13. *Пусть* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ *— независимые действительные с.в. с* $\mathsf{E}\zeta_i = 0$, $\sigma_i^2 = \mathsf{D}\zeta_i < \infty$, $i = 1, \ldots, m$. *Положим* $S_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \zeta_j$ $(i = 1, \ldots, m)$, $d_m^2 = \mathsf{D}S_m$. *Тогда для любого* $\lambda > \sqrt{2}$ *справедливо неравенство*

$$P(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |S_i| \geqslant \lambda d_m) \leqslant 2P(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m). \tag{6.20}$$

□ Пусть $A_j = \{\max\limits_{i<j} |S_i| < \lambda d_m,\ |S_j| \geqslant \lambda d_m\}$. Тогда событие $A = \{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |S_i| \geqslant \lambda d_m\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$, причем $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

$$P(A) = P(A \cap \{|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) + P(A \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) \leqslant$$
$$\leqslant P(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^{m} P(A_j \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}).$$

Заметим, что $A_m \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} = \varnothing$. Для $1 \leqslant j < m$ имеем $A_j \cap \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} \subset A_j \cap \{|S_m - S_j| \geqslant \sqrt{2}d_m\}$, поскольку из того, что $|S_j| \geqslant \lambda d_m$, $|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m$, следует, что $|S_m - S_j| \geqslant |S_j| - |S_m| \geqslant \sqrt{2}d_m$. События A_j и $\{|S_m - S_j| > \sqrt{2}d_m\}$ зависят от разных групп независимых с.в. и поэтому независимы. Используя неравенство Чебышева, получим (учитывая, что $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} P(A_j)$):

$$P(A) \leqslant P(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^{m-1} P(A_j) \frac{\sigma_{j+1}^2 + \ldots + \sigma_m^2}{2d_m^2} \leqslant$$
$$\leqslant P(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} P(A_j) \leqslant P(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2}P(A). \ \square$$

Заметим, что $S_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. **Поэтому условие** 1° **теоремы** 6.9 **выполнено. Проверим условие** $2'$ **замечания** 6.10. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Пусть $t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}$ — соответственно самая правая из точек $t_{n,j} \leqslant (i-1)/N$ и самая левая из $t_{n,j} \geqslant i/N$, $i = 1, \ldots, N$. Из (6.15) следует, что при всех достаточно больших n

$$1/N \leqslant t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)} \leqslant 2/N, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{6.21}$$

Далее,

$$p_{n,i} := P\left(\sup_{\frac{i-1}{N} \leqslant t \leqslant \frac{i}{N}} \left|S_n(t) - S_n\left(\frac{i-1}{N}\right)\right| > \varepsilon\right) \leqslant$$
$$\leqslant P\left(\max_{j:\ t_{n,j} \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} |S_n(t_{n,j}) - S_n(t_{n,i}^{(1)})| > \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{6.22}$$

поскольку

$$\sup_{\frac{i-1}{N} \leqslant t \leqslant \frac{i}{N}} \left|S_n(t) - S_n\left(\frac{i-1}{N}\right)\right| \leqslant \sup_{t \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} \left|S_n(t) - S_n(t_{n,i}^{(1)}) + S_n(t_{n,i}^{(1)}) - S_n\left(\frac{i-1}{N}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[t^{(1)}_{n,i},t^{(2)}_{n,i}]} |S_n(t) - S_n(t^{(1)}_{n,i})| = 2 \max_{j:\ t_{n,j}\in[t^{(1)}_{n,i},t^{(2)}_{n,i}]} |S_n(t_{n,j}) - S_n(t^{(1)}_{n,i})|.$$

Применяя лемму 6.13 и учитывая, что $\mathsf{D}(S_n(t^{(2)}_{n,i}) - S_n(t^{(1)}_{n,i})) = t^{(2)}_{n,i} - t^{(1)}_{n,i}$, получим $p_{n,i} \leqslant 2P(|S_n(t^{(2)}_{n,i}) - S_n(t^{(1)}_{n,i})| > (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{t^{(2)}_{n,i} - t^{(1)}_{n,i}})$, где $\lambda = \varepsilon/(2\sqrt{t^{(2)}_{n,i} - t^{(1)}_{n,i}}) > \sqrt{2}$ в силу (6.21) при всех $i = 1, \dots, N$, если $N > 16\varepsilon^{-2}$ и n достаточно велико. Пусть $t^{(1)}_{n,i} = t_{n,j_i}$, $t^{(2)}_{n,i} = t_{n,r_i}$, $j_i = j_i(n)$, $r_i = r_i(n)$. Назовем i-й группой в n-й серии величины с номерами l из множества $J^{(n)}_i = \{l:\ j_i < l \leqslant r_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $S^{(i)}_n = \sum\limits_{l\in J^{(n)}_i} X_{n,l} = S_n(t^{(2)}_{n,i}) - S_n(t^{(1)}_{n,i})$. Тогда в силу (6.21) и (6.13)

$$\sum_{l\in J^{(n)}_i} \mathsf{E}\left(\frac{X_{n,l}}{\sqrt{\mathsf{D}S^{(i)}_n}}\right)^2 \mathbb{1}\left\{\frac{|X_{n,l}|}{\sqrt{\mathsf{D}S^{(i)}_n}} > \varepsilon\right\} \quad\leqslant\quad N\sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}|X_{n,i}|^2 \mathbb{1}\left\{|X_{n,i}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right\} \quad\to\quad 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, по теореме Линдеберга (где $k = 1$) для $i = 1, \dots, N$ и любого $\nu > 0$ имеем при всех $n > n_0(\nu, N)$ и $\lambda > \sqrt{2}$

$$\left|P\left(|S^{(i)}_n| > (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{\mathsf{D}S^{(i)}_n}\right) - P(|\xi| > \lambda - \sqrt{2})\right| < \nu/(2N), \tag{6.23}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ (учли, что в ЦПТ сходимость функций распределения равномерна на всей оси). Согласно (6.21) для $i = 1, \dots, N$ имеем $\lambda - \sqrt{2} \geqslant \varepsilon\sqrt{N}/(2\sqrt{2}) - \sqrt{2}$. Поэтому, выбрав $N = N(\varepsilon, \nu)$ достаточно большим и воспользовавшись оценкой (3.17), получим $P(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}) < \nu/2N$. Из последнего неравенства и (6.22)–(6.23) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{N} p_{n,i} < \nu$. □

Теперь мы наметим схему, по которой с помощью изложенных результатов можно доказать знаменитый **критерий согласия Колмогорова**.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р. действительные величины, имеющие ф.р. $F(x)$. Определим согласно (1.14) эмпирические меры P_n, при этом, взяв $B = (-\infty, x]$, получим эмпирические функции распределения $F_n(x, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 6.14 (Колмогоров). *Если для описанной выше последовательности $\{\xi_n\}$ ф.р. F непрерывна, то для всех $z > 0$ при $n \to \infty$*

$$P(\sup_{-\infty<x<\infty} |\sqrt{n}(F_n(x,\omega) - F(x))| \leqslant z) \to 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2z^2} = K(z). \tag{6.24}$$

(Исходное $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ считается пополненным.)

□ Воспользовавшись заменой $\zeta_i = F^{-1}(\xi_i)$, $i \in \mathbb{N}$, где $F^{-1}(t) = \inf\{s:\ F(s) \geqslant t\}$, $t \in \mathbb{R}$, **можно с самого начала считать** $\xi_1, \xi_2, \dots$ **равномерно распределенными на** $[0, 1]$, что мы и будем делать. Таким образом, надо доказать, что для всех $z \geqslant 0$

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_n(t)| \leqslant t) \to K(z), \quad n \to \infty, \tag{6.25}$$

где $Y_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$. Определим функционал $h(x(\cdot)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Естественный путь доказательства (6.25) состоял бы в том, чтобы найти слабый предел $Y_n(\cdot)$ и воспользоваться теоремой 6.3. Непосредственно так действовать нельзя, поскольку Y_n не являются с.э. в $C[0,1]$ (они входят в пространство Скорохода $D[0,1]$, см. [?, гл. 3]). Однако можно выйти из этого затруднения в рамках развитой выше теории.

Пусть $\xi_{(1)},\dots,\xi_{(n)}$ образуют вариационный ряд, построенный по $\xi_1,\dots,\xi_n$, т. е. при каждом ω величины $\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega)$ перенумерованы в порядке возрастания (с вероятностью 1 все точки $\xi_1,\dots,\xi_n$ различны). Пусть при каждом ω функция $G(t,\omega)$, $t\in[0,1]$, есть непрерывная случайная ломаная с узлами $(\xi_{(i)}(\omega), i/(n+1))$, $i=0,\dots,n+1$, полагаем $\xi_{(0)}(\omega)=0$, $\xi_{(n+1)}(\omega)=1$. Итак, $G_n(\cdot,\omega)$ — с.э. в $C[0,1]$. Теперь заметим, что $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_n(t)-G_n(t)|\leqslant \dfrac{1}{n}$ с вероятностью 1, поскольку $F_n(t,\omega)=i/n$ для $t\in[\xi_{(i)}(\omega),\xi_{(i+1)}(\omega))$, $i=0,\dots,n$. Обозначим $Z_n(t)=\sqrt{n}(G_n(t)-t)$, $t\in[0,1]$. Тогда $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|Y_n(t)-Z_n(t)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому предельное распределение $h(Y_n(\cdot))$ будет совпадать с предельным распределением $h(Z_n(\cdot))$ ($h(Y_n(\cdot))$ рассматривается просто как случайная величина).

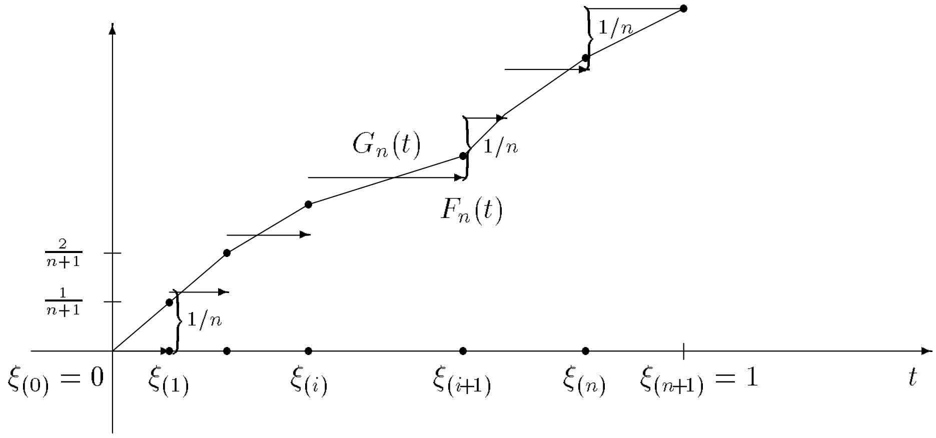

Рис. 6.3

Доказательство теоремы Колмогорова вытекает из следующих двух утверждений: $Z_n\xrightarrow{\mathcal{D}}W_0$ в $C[0,1]$ при $n\to\infty$, где W_0 — броуновский мост (см. (4.29)), и $P(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_0(t)|\leqslant z)=K(z)$, $z\geqslant 0$. Первое из этих утверждений доказывается по той же схеме, что и теорема 6.11 (сходимость к.-м.р. и плотность), поэтому доказательство опускается, см. [?, гл. 2, §13]. Остановимся на втором утверждении.

Определим семейство вероятностных мер

$$Q_\varepsilon(C)=P(W(\cdot)\in C\mid W(1)\in[-\varepsilon,\varepsilon]),\quad \varepsilon>0, \tag{6.26}$$

здесь $C\in\mathcal{B}(C[0,1])$, $W(\cdot)$ — винеровский процесс.

Лемма 6.15. *$Q_\varepsilon\Rightarrow\mathbb{W}^0$ при $\varepsilon\to 0+$, где $\mathbb{W}^0$ — распределение броуновского моста в $C[0,1]$.*

□ В силу теоремы 6.2 достаточно показать, что $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0+}Q_\varepsilon(F)\leqslant P(W^0\in F)$ при любом замкнутом $F\in\mathcal{B}(C[0,1])$. Для произвольных $0\leqslant t_1<\ldots<t_k\leqslant 1$, $k\in\mathbb{N}$, вектор $(W^0(t_1),\dots,W^0(t_k))$ не зависит от $W(1)$. Действительно, $(W^0(t_1),\dots,W^0(t_k),W(1))$ имеет гауссовское распределение как линейное преобразование гауссовского вектора. Кроме того, $\mathsf{E}W^0(t)W(1)=\mathsf{E}W(t)W(1)-t\mathsf{E}W(1)^2=\min\{t,1\}-t=0$,

$t \in [0,1]$, что влечет указанную независимость. Таким образом, для любого цилиндра $C \in \mathcal{B}(C[0,1])$ и любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$P(W^0(\cdot) \in C,\ W(1) \in B) = P(W^0 \in C)P(W(1) \in B). \qquad (6.27)$$

Поскольку цилиндры образуют алгебру, порождающую $\mathcal{B}(C[0,1])$ (см. теорему 6.6 а)), видим, что (6.27) справедливо для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и всех $C \in \mathcal{B}(C[0,1])$ (см. доказательство леммы 4.2) и, следовательно, $P(W^0(\cdot) \in C \mid W(1) \in [-\varepsilon,\varepsilon]) = P(W^0(\cdot) \in C)$ при каждом $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$\rho(W(\cdot), W^0(\cdot)) = \sup_{t\in[0,1]} |W(t) - (W(t) - tW(1))| = |W(1)|,$$

где ρ — равномерная метрика в $C[0,1]$. Возьмем замкнутое $F \in \mathcal{B}(C[0,1])$. Из того, что $|W(1)| < \delta$ и $W(\cdot) \in F$, следует, что $W^0 \in F^\delta = \{x \in C[0,1]\colon\ \rho(x,F) < \delta\}$. Для любого $\varepsilon < \delta$ получаем

$$P(W \in F|\ |W(1)| \leqslant \varepsilon) \leqslant P(W^0 \in F^\delta \mid |W(1)| \leqslant \varepsilon) = P(W^0 \in F^\delta).$$

Таким образом,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} Q_\varepsilon(F) \leqslant \mathbb{W}^0(F^\delta). \qquad (6.28)$$

Остается в (6.28) перейти к пределу при $\delta \downarrow 0$ и воспользоваться тем, что $\bigcap_{\delta>0} F^\delta = F$. □

Лемма 6.15 показывает, что распределение броуновского моста естественно интерпретировать как распределение условного винеровского процесса (при условии $W(1) = 0$).

Теперь заметим, что $\mathbb{W}^0 h^{-1}(B) = \mathbb{W}^0(h^{-1}(B)) = P(W^0 \in h^{-1}(B)) = P(h(W^0) \in B)$ и

$$Q_\varepsilon h^{-1}(B) = P(W(\cdot) \in h^{-1}(B) \mid W(1) \in [-\varepsilon,\varepsilon]) = P(h(W) \in B \mid W(1) \in [-\varepsilon,\varepsilon]),$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $h(x(\cdot)) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ для $x(\cdot) \in C[0,1]$. Поэтому лемма 6.15 и теорема 6.3 дают

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |W^0(t)| \leqslant z) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{P(\sup_{t\in[0,1]} |W(t)| \leqslant z,\ |W(1)| \leqslant \varepsilon)}{P(|W(1)| \leqslant \varepsilon)}, \quad z > 0. \qquad (6.29)$$

То, что в (6.29) можно брать любые $z > 0$, вытекает из того, что предел, фигурирующий в (6.29), т. е. функция $K(z)$, оказывается непрерывной для рассматриваемых z. Многократно пользуясь принципом отражения, можно найти вероятность, стоящую в числителе формулы (6.29) (см., например, [?, с. 96]), а поделив на знаменатель и затем совершив предельный переход при $\varepsilon \to 0+$, получить утверждение теоремы 6.14. См. также теорему Д6.14 и рассуждения перед ней. □

Дополнения и упражнения.

Упр. 6.1. Докажите, что $Q_n \Rightarrow Q$ при $n \to \infty$ (меры заданы на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, где $(\mathcal{X},\rho)$ – метрическое пространство) тогда и только тогда, когда (6.1) выполнено для всех действительных ограниченных *липшицевых* функций, т.е. таких $f:\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, что

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty \ \text{ и } \ L(f) := \sup_{x\neq y}\{|f(x) - f(y)|/\rho(x,y)\} < \infty. \qquad (6.30)$$

Упр. 6.2. Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – метрические пространства (измеримость f не предполагается). Покажите, что множество $D_f = \{x :$ функция f разрывна в точке $x\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Докажите, что $Q_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда (6.1) выполнено для любой ограниченной $f \in \mathcal{B}(\mathcal{X})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такой, что $Q(D_f) = 0$.

Упр. 6.3. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$ с евклидовой метрикой. Будет ли означать, что $Q_n \Rightarrow Q$, если (6.1) выполненяется для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.е. для бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем?

Определение слабой сходимости (6.1) **действует для любых конечных** (необязательно вероятностных) **мер**. В этой связи предлагается

Упр. 6.4. Пусть Q, Q_n, $n \in \mathbb{N}$ – конечные меры на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Докажите, что теорема 6.2 останется верной, если к ее условиям добавить требование $Q_n(\mathcal{X}) \to Q(\mathcal{X})$ при $n \to \infty$.

В измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ класс множеств $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ называется *определяющим меру*, если равенство любых двух мер на $\mathcal{N}$ влечет их равенство на $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{X}$ – метрическое пространство. Класс множеств $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ называется *определяющим* (слабую) *сходимость*, если для любой последовательности мер $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ такой, что $Q_n(B) \to Q(B)$ при всех $B \in \mathcal{M}$ с $Q(\partial B) = 0$ имеем $Q_n \Rightarrow Q$.

Упр. 6.5. Покажите, что класс множеств, определяющий сходимость, является классом, определяющим меру. Объясните, почему обратное утверждение не обязано выполняться.

Упр. 6.6. (сравните с примером 6.7). Докажите, что в польском пространстве $\mathbb{R}^\infty$ (снабженном метрикой вида

$$\rho((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

и в котором борелевская σ-алгебра совпадает с цилиндрической) $Q_n \Rightarrow Q$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда слабо сходятся все конечномерные распределения. Иначе говоря, **класс цилиндров в $\mathbb{R}^\infty$ одновременно является классом, определяющим меру и определяющим сходимость**.

Упр. 6.7. (доказательство формулы (5.14)). По центральной предельной теореме $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $|S_n|/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} |\xi|$ по теореме 6.3. Кроме того, последовательность $\{|S_n|/\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно интегрируема. Поэтому $\mathsf{E}|S_n|/\sqrt{n} \to \mathsf{E}|\xi| = \sqrt{2/\pi}$, $n \to \infty$.

Для случайного вектора ξ в $\mathbb{R}^m$ пусть F_ξ и φ_ξ обозначают соответственно функцию распределения и характеристическую функцию (см. стр. ??). В курсе теории вероятностей доказывается важная

Теорема Д6.8 (см., напр., [?, с. 344]). *Соотношение $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ для случайных векторов в $\mathbb{R}^m$ равносильно любому из следующих двух условий:*

1. *$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$, в которой непрерывна функция F_ξ.*

2. *$\varphi_{\xi_n}(\lambda) \to \varphi_\xi(\lambda)$ при $n \to \infty$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^m$.*

Кроме того, если для случайных векторов ξ_n в $\mathbb{R}^m$ имеем $\varphi_{\xi_n}(\lambda) \to \varphi(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}^m$, причем функция φ непрерывна в точке $0 \in \mathbb{R}^m$, то $\varphi(\cdot) = \varphi_\xi(\cdot)$ для некоторого случайного вектора ξ и $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ при $n \to \infty$.

Упр. 6.9. [прием Крамера – Уолда] Докажите, что $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ в $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ тогда и только тогда, когда $(a, \xi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (a, \xi)$ при $n \to \infty$ для каждого неслучайного вектора $a \in \mathbb{R}^m$ где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Этот результат показывает, как **можно сводить изучение сходимости случайных векторов в $\mathbb{R}^m$ к изучению слабой сходимости случайных величин**.

Глубокие результаты о слабой сходимости сумм независимых случайных величин в схеме серий приводят к следующему утверждению.

Теорема Д6.10 (Дуб). *Пусть процесс $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ принимает при каждом t значения в $\mathbb{R}^m$ и имеет независимые приращения. Если траектории процесса непрерывны (п.н.), то процесс $Y = \{Y_t = X_t - X_0,\ t \geqslant 0\}$ является гауссовским. При этом для $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*

$$\mathsf{E}(X_t - X_s) = M_t - M_s, \quad \mathsf{D}(X_t - X_s) = G_t - G_s, \tag{6.31}$$

где непрерывная функция $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, а неубывающая непрерывная функция $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m^2}$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$).

Если в условиях этой теоремы **величина X_0 имеет вырожденное распределение, то и сам процесс $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ будет гауссовским** (объясните). Если процесс X удовлетворяет условию теоремы Д6.10 на отрезке $[a, b]$, то и ее утверждение справедливо для процесса $\{Y_t = X_t - X_a,\ t \in [a, b]\}$, достаточно ввести процесс $\widetilde{X}_t = X_{t+a}$ для $t \in [0, b - a]$ и $\widetilde{X}_t = X_b$ при $t \geqslant b$. Технически сложное доказательство теоремы Д6.10 и ряда вспомогательных утверждений, представляющих самостоятельный интерес, отнесено в приложение 2.

Покажем, как **применяя принцип инвариантности** (теорему 6.11) **легко найти распределение** $\sup_{t\in[0,1]} W(t)$. Построим случайные ломаные $S_n(\cdot)$ по сериям величин $X_{n,i} = X_i/\sqrt{n}$, $i = 1, \ldots, n$, где $X_1, X_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$.

Упр. 6.11. (сравните со следствием 4.14 Докажите, что для любого целого неотрицательного числа j

$$P(\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant j) = 2P(S_n > j) + P(S_n = j), \tag{6.32}$$

где $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $k \geqslant 1$ а $\{X_n\}$ введены выше.

Теперь заметим, что для каждого $z > 0$

$$P(\sup_{t\in[0,1]} S_n(t) > z) = P(\max_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{S_k}{\sqrt{n}} \geqslant z) = P(\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant j_n) = 2P(S_n > j_n) + P(S_n = j_n),$$

где j_n – наименьшее целое число, большее или равное $z\sqrt{n}$ (тогда $j_n = -[-z\sqrt{n}]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа). Пользуясь ЦПТ, получаем, что для любого $z > 0$

$$P(S_n > j_n) = P(S_n/\sqrt{n} > j_n/\sqrt{n}) \to P(\xi > z),$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Точнее говоря, мы учли равномерную сходимость функций распределения нормированных сумм к функции распределения стандартного нормального закона. Это вытекает из следующего элементарного упражнения.

Упр. 6.12. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ где ξ, ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ действительные случайные величины, причем $F_\xi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для получения из (6.32) искомого результата (4.25) остается выполнить простое

Упр. 6.13. Докажите, что для рассматриваемых в упражнении 6.11 двузначных величин X_i, $i \in \mathbb{N}$, и их сумм $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $k \geqslant 1$, имеем

$$\max_j P(S_n = j) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть, по-прежнему $X_1, X_2, \ldots$ н.о.р., $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$ и $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $k \geqslant 1$. Обозначим $m_n = \min\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$, $M_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$ и для броуновского движения $W(t)$, $t \geqslant 0$, положим $m = \inf\limits_{t \in [0,1]} W(t)$, $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} W(t)$. Введем непрерывное отображение $h : C[0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$h(x(\cdot)) = (\inf_{t \in [0,1]} x(t), \sup_{t \in [0,1]} x(t), x(1)).$$

В силу теорем 6.3 и 6.11, имеем

$$h(S_n(\cdot)) = (m_n/\sqrt{n}, M_n/\sqrt{n}, S_n/\sqrt{n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (m, M, W(1)), \tag{6.33}$$

где $S_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ – случайная ломаная с узлами $(k/n, S_k/\sqrt{n})$, $k = 0, \ldots, n$. Несколько более сложные рассуждения, чем приведенные выше для нахождения распределения M, позволяют (см., напр., [**?**, с. 18-21]) с помощью предельного перехода (6.33) установить следующий результат.

Теорема Д6.14 (Леви). *Для $a < 0 < b$, $a < r < s < b$ и $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ имеем*

$$P(a < m \leqslant M < b,\, r < W(1) < s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(r + 2k(b-a) < \xi < s + 2k(b-a)) -$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(2b - s + 2k(b-a) < \xi < 2b - r + 2k(b-a)).$$

Из курса теории вероятностей известно, что **даже для действительных случайных величин определенному типу асимптотических задач отвечает определенный тип сходимости.** Так, согласно ЦПТ для н.о.р. величин, X_k, $k \in \mathbb{N}$, со средним 0 и дисперсией 1, имеем $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ при $n \to \infty$, где $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. В то же время не существует (объясните) с.в. Y такой, что $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} Y$ при $n \to \infty$ (а значит, нельзя обеспечить предел нормированных сумм ни почти наверное, ни в среднем порядка r).

Обсудим некоторые типы сходимости вероятностных мер на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Основная идея здесь заключается в том, чтобы обеспечить определенную близость $\langle f, Q_n \rangle$ к $\langle f, Q \rangle$ для f из тех или иных классов функций. Обозначим $\mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ – пространство, состоящее из ограниченных $\mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – измеримых функций $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, снабженное нормой $\|\cdot\|_\infty$, см. (6.30). Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ – пространство вероятностных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Для $P, Q \in \mathcal{P}$ определим *расстояние по вариации* между P и Q формулой

$$\|P - Q\|_{\mathrm{var}} = \sup\{|\langle f, P \rangle - \langle f, Q \rangle| : f \in \mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Упр. 6.15. Проверьте, что $\nu(P,Q) = \|P - Q\|_{\mathrm{var}}$ является расстоянием на $\mathcal{P}$, которое метризует *топологию равномерной сходимости* на $\mathcal{P}$, задаваемую системой окрестностей $U(Q, \delta) = \{P \in \mathcal{P} : \nu(P,Q) < \delta\}$, где $Q \in \mathcal{P}$, $\delta > 0$ (о топологических пространствах см. [**?**, гл. 2, §5]).

Упр. 6.16. Докажите, что

$$\nu(P,Q) = 2\sup_{A\in\mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|.$$

Упр. 6.17. Пусть $P, Q \in \mathcal{P}$ и $P \ll \lambda$, $Q \ll \lambda$ где $\lambda \in \mathcal{P}$ (т.е. P и Q абсолютно непрерывны относительно меры λ; такая мера существует, достаточно взять $\lambda = (P+Q)/2$). Пусть $g = dP/d\lambda$, $h = dQ/d\lambda$. Докажите, что $\nu(P,Q) = \|g-h\|_{L^1(\lambda)}$, где $L^1(\lambda) = L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \lambda)$. Покажите, что $\nu(P,Q) \leqslant 2$, причем равенство достигается только, если $P \perp Q$ (меры *сингулярны*, т.е. имеется $A \in \mathcal{A}$ такое, что $P(A) = 1$ и $Q(A) = 0$).

Упр. 6.18. Докажите, что $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \nu)$ – **полное метрическое пространство**. Докажите, что это пространство **несепарабельно, если $\mathcal{X}$ – несчетно**. Что можно сказать о сепарабельности $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \nu)$, если $\mathcal{X}$ – конечно или счетно?

Использование расстояния по вариации дает **современный вариант теоремы Пуассона о биномиальных вероятностях**.

Теорема Д6.19. *Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, где $X_1, \ldots, X_n$ – независимые величины, $P(X_k = 1) = p_k$, $P(X_k = 0) = 1 - p_k$, $k = 1, \ldots, n$. Пусть Y – пуассоновская с.в. с параметром $\lambda = p_1 + \ldots + p_n$. Тогда $|P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leqslant \sum_{k=1}^n p_k^2$ для* **любого** *$B \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство этого результата можно найти в [?, с.], там же указаны уточнения приведенной оценки. Докажите самостоятельно, что верна

Теорема Д6.20 (Шеффе). *Пусть Q_n, $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ – такие меры на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, что $Q_n \ll \lambda$ для некоторой σ-конечной меры λ на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Пусть $dQ_n/d\lambda \to dQ_\infty/d\lambda$ п.н. (по мере λ). Тогда Q_n сходится к Q_∞ по вариации.*

С расстоянием по вариации тесно связано *расстояние Какутани – Хеллингера* $d(P,Q)$. Используя обозначения, введенные в упр. 6.17, положим

$$d^2(P,Q) = \frac{1}{2}\langle(\sqrt{g} - \sqrt{h})^2, \lambda\rangle.$$

Упр. 6.21. Проверьте, что d – метрика на $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, значения которой не зависят от выбора доминирующей меры λ.

Заметим, что d связана с *интегралом Хеллингера* порядка 1/2. Этот интеграл порядка $\alpha \in (0,1)$ задается формулой

$$H(\alpha; P, Q) = \langle (g)^\alpha h^{1-\alpha}, Q\rangle.$$

Тогда $d^2(P,Q) = 1 - H(1/2; P, Q)$.

Упр. 6.22. Докажите, что $2d^2(P,Q) \leqslant \|P-Q\|_{\mathrm{var}} \leqslant \sqrt{8}d(P,Q)$ для $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Докажите, что если $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$, то

$$H(\alpha; P, Q) = \prod_{k=1}^n H(\alpha; P_k, Q_k).$$

Примеры использования d и H даны в [?, гл. 3, §9,10].

Теперь обратимся к очень плодотворному **методу переопределения случайных элементов на новое вероятностное пространство**. Выполним элементарное

Упр. 6.23. Пусть $X_n \to X_\infty$ п.н. при $n \to \infty$, где $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $X_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда $\mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X_\infty)$, $n \to \infty$.

□ В силу теоремы Лебега $\mathsf{E}f(X_n) \to \mathsf{E}f(X_\infty)$ для любой функции $f \in C_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. □

Утверждение, обратное к содержащемуся в этом упражнении, неверно даже для действительных с.в., заданных на одном вероятностном пространстве (приведите пример). Однако **в должном смысле удается обратить приведенный результат**, как показывает

Теорема Д6.24 (Скороход). *Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ – польское пространство, и пусть $Q_n \Rightarrow Q_\infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и такие случайные величины $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $X_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$, что $\mathcal{L}(X_n) = Q_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots, \infty$ и $X_n \to X_\infty$ п.н. при $n \to \infty$.*

□ **Сначала построим определенную систему измельчающихся разбиений** $\mathcal{X}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ в силу сепарабельности $\mathcal{X}$ имеются открытые шары $G_{k,m}$, $m \in \mathbb{N}$ радиуса $2^{-(k+1)}$ такие, что $\cup_m G_{k,m} = \mathcal{X}$. Меняя радиус каждого шара в пределах от $2^{-(k+1)}$ до 2^{-k}, возможно получить покрытие $\mathcal{X}$ открытыми шарами $B_{k,m}$ такими, что $Q_n(\partial B_{k,m}) = 0$ при всех $k, m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (объясните подробнее). Положим теперь $D_{k,1} = B_{k,1}$ и для $m \geqslant 2$ пусть $D_{k,m} = B_{k,m} \setminus \cup_{r=1}^{m-1} B_{k,r}$. При каждом $k \in \mathbb{N}$ множества $D_{k,m}$, $m \in \mathbb{N}$ образуют разбиение $\mathcal{X}$, причем $\mathrm{diam} D_{k,m} \leqslant 2^{-k}$, $m \in \mathbb{N}$ ($\mathrm{diam} D = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in D\}$, $D \in \mathcal{X}$) и $Q_n(\partial D_{k,m}) = 0$ для всех рассматриваемых n, k, m. **Введем множества** $S_{i_1,\ldots,i_k} = \cap_{j=1}^k D_{j,i_j}$ (все индексы – из $\mathbb{N}$). Они образуют измельчающиеся с ростом k вложенные разбиения $\mathcal{X}$, такие что

1) $S_{i_1,\ldots,i_k} \cap S_{j_1,\ldots,j_k} = \emptyset$ при $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots, j_k)$;

2) $\cup_j S_j = \mathcal{X}$, $\cup_j S_{i_1,\ldots,i_k,j} = S_{i_1,\ldots,i_k}$;

3) $\mathrm{diam} S_{i_1,\ldots,i_k} \leqslant 2^{-k}$ для всех $k, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$;

4) $Q_n(\partial S_{i_1,\ldots,i_k}) = 0$ для всех $k, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Теперь **будем строить искомую последовательность случайных величин на** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$ и $P = |\cdot|$, где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега (точнее, как всегда, мы **считаем σ-алгебру $\mathcal{F}$ пополненой**). Для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ и $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиение $[0, 1)$ полуинтервалами

$$\Delta^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k} = [a^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}, b^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}),$$

где $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ и $\left|\Delta^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}\right| = Q_n(S_{i_1,\ldots,i_k})$, а именно,

$$\Delta^{(n)}_1 = [0, Q_n(S_1)),\ \Delta^{(n)}_2 = [Q_n(S_1), Q_n(S_1) + Q_n(S_2)), \ldots$$

Аналогичным образом каждый из полуинтервалов $\Delta^{(n)}_i$ разбивается на полуинтервалы $\Delta^{(n)}_{i,j}$ (последовательным прикладыванием их, начиная с левого конца $\Delta^{(n)}_i$) и т.д. Интервалы $\Delta^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}$ получаются упорядоченными в лексикографическом смысле.

Для $k \in \mathbb{N}$ в каждом непустом множестве $S_{i_1,\ldots,i_k}$ выберем точку $x_{i_1,\ldots,i_k}$ и для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ **определим на $\Omega = [0, 1)$ функции**

$$X^k_n(\omega) = x_{i_1,\ldots,i_k} \quad \text{при} \quad \omega \in \Delta^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}$$

(если $Q_n(S_{i_1,\dots,i_k}) = 0$, то $\Delta^{(n)}_{i_1,\dots,i_k} = \emptyset$ – промежуток вида $[a,a)$, и определять функцию на таком промежутке не требуется). Очевидно, $X_n^k \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$ при всех k,n. Заметим, что

$$\rho(X_n^k(\omega), X_n^{k+m}(\omega)) \leqslant 2^{-k} \text{ для каждого } \omega \in [0,1) \text{ и всех } k,n,m \tag{6.34}$$

по свойствам 2) и 3) построенных разбиений. В силу полноты $\mathcal{X}$ существует

$$X_n(\omega) = \lim_{k\to\infty} X_n^k(\omega) \text{ для } \omega \in [0,1),\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tag{6.35}$$

причем по лемме 4.6 имеем $X_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$ для всех $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Пользуясь свойством 4) и пунктом 3° теоремы 6.2, получаем, что при всех $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$

$$Q_n(S_{i_1,\dots,i_k}) = \left|\Delta^{(n)}_{i_1,\dots,i_k}\right| \to \left|\Delta^{(\infty)}_{i_1,\dots,i_k}\right| = Q_\infty(S_{i_1,\dots,i_k}),\ n \to \infty.$$

Следовательно, если $Q_\infty(S_{i_1,\dots,i_k}) > 0$ (и, значит $\Delta^{(\infty)}_{i_1,\dots,i_k} \neq \emptyset$), то для каждой точки $\omega \in \left(\Delta^{(\infty)}_{i_1,\dots,i_k}\right)^\circ$ (B° – это внутренность множества B), найдется номер $n_k(\omega)$ такой, что $\omega \in \left(\Delta^{(n)}_{i_1,\dots,i_k}\right)^\circ$ при $n \geqslant n_k(\omega)$ (объясните подробнее). Но тогда для рассматриваемого ω получим $X_n^k(\omega) = X_\infty^k(\omega)$ и, учитывая (6.35), имеем

$$\rho(X_n(\omega), X_\infty(\omega)) \leqslant \rho(X_n(\omega), X_n^k(\omega)) + \rho(X_n^k(\omega), X_\infty^k(\omega)) + \rho(X_\infty^k(\omega), X_\infty(\omega)) \leqslant 2^{-k+1}$$

при $n \geqslant n_k(\omega)$. Положим $\Omega_0 = \cap_{k=1}^\infty \cup_{i_1,\dots,i_k} \left(\Delta^{(\infty)}_{i_1,\dots,i_k}\right)^\circ$. Очевидно, $P(\Omega_0) = |\Omega_0| = 1$ и $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$ для $\omega \in \Omega_0$ при $n \to \infty$. Тогда $X_\infty \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$ в силу леммы 4.6.

Осталось показать, что $\mathcal{L}(X_n) = Q_n$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. По построению при всех $n, m, i_1, \dots, i_m$ и $k \geqslant m$

$$P(X_n^k \in S_{i_1,\dots,i_m}) = \left|\Delta^{(n)}_{i_1,\dots,i_m}\right| = Q_n(S_{i_1,\dots,i_m}). \tag{6.36}$$

Любое открытое множество G в $\mathcal{X}$ можно представить, как объединение конечного или счетного числа множеств $S_{i_1,\dots,i_m}$ (при разных m и $i_1, \dots, i_m$). Проверьте это в качестве упражнения (сразу вытекает из теорем 3,4 [?, гл. 2, §5]). Возьмем $G_N \to G$, где G_N состоит из N множеств указанного вида. Следовательно, $P(X_n^k \in G) \geqslant P(X_n^k \in G_N)$ для каждого N и, учитывая (6.37), имеем

$$\liminf_{k\to\infty} P(X_n^k \in G) \geqslant \liminf_{k\to\infty} P(X_n^k \in G_N) = Q_n(G_N).$$

Таким образом, $\liminf_{k\to\infty} P(X_n^k \in G) \geqslant Q_n(G)$. Согласно пункту 2° теоремы 6.2 получаем, что $\mathcal{L}(X_n^k) \Rightarrow Q_n$ при $k \to \infty$ для $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Но по доказанному $X_n^k \to X_n$ п.н. при $k \to \infty$ для всех n, поэтому из упр. 6.22 вытекает, что $\mathcal{L}(X_n^k) \Rightarrow \mathcal{L}(X_n)$. Остается воспользоваться единственностью слабого предела. □

Теорема Д6.24 позволяет очень просто получить утверждение упр. 6.2. Из этой теоремы также легко вытекает (с учетом известных фактов о сходимости п.н.), что если $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, причем X_n равномерно интегрируема, то $\mathsf{E}X_n \to \mathsf{E}X$. Далее нам понадобится

Лемма Д6.25. *Пусть $(\mathcal{X}, \rho)$ –польское пространство, и $Q_n \Rightarrow Q$ в $\mathcal{P}$. Тогда*

$$\sup\{|\langle f, Q_n\rangle - \langle f, Q\rangle| :\ f \in \mathcal{G}_C\} \to 0,\ n \to \infty, \tag{6.37}$$

где $\mathcal{G}_C$ – класс равностепенно непрерывных функций $f :\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, имеющих $\|f\|_\infty \leqslant C$.

□ Построим на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (мы даже знаем, на каком!) случайные величины, фигурирующие в теореме Д6.24. Таким образом (формула (2.10)), требуется проверить, что

$$\sup\{|\mathsf{E}f(X_n) - \mathsf{E}f(X_\infty)| : \ f \in \mathcal{G}_C\} \to 0, \ n \to \infty.$$

В силу равностепенной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ для всех $f \in \mathcal{G}_C$, как только $\rho(x, y) \leqslant \delta$. Тогда очевидно

$$\begin{aligned} |\mathsf{E}f(X_n) - \mathsf{E}f(X_\infty)| \leqslant \mathsf{E}|f(X_n) - f(X_\infty)|\mathbb{1}\{\rho(X_n, X_\infty) \leqslant \delta\} + \\ + \mathsf{E}|f(X_n) - f(X_\infty)|\mathbb{1}\{\rho(X_n, X_\infty) \leqslant \delta\} \leqslant \varepsilon + 2CP(\rho(X_n, X_\infty) > \delta). \end{aligned}$$

Остается заметить, что если $X_n \to X_\infty$ п.н., то $X_n \xrightarrow{P} X_\infty$, т.е.

$$P(\omega : \ \rho(X_n(\omega), X_\infty(\omega)) > \delta) \to 0 \ \text{ для любого } \ \delta > 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

$\rho(X_n, X_\infty)$ есть действительная случайная величина (в силу сепарабельности $\mathcal{X}$), которая стремится к 0 п.н., а значит и по вероятности. □

Тперь мы обратимся к очень важному **вопросу о метризации слабой сходимости. Пусть далее** (пока не оговорено) $(\mathcal{X}, \rho)$ – **польское пространство**. Для $B \subset \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ пусть $B^\varepsilon = \{x \in \mathcal{X} : \ \rho(x, B) < \varepsilon\}$, где $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : \ y \in B\}$. Введем на $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *метрику Леви – Прохорова*

$$\pi(P, Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ P(B) \leqslant Q(B^\varepsilon) + \varepsilon, \ Q(B) \leqslant P(B^\varepsilon) + \varepsilon \ \text{ для } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}. \quad (6.38)$$

Упр. 6.26. Докажите, что $\pi(\cdot, \cdot)$ является метрикой на $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Докажите, что верно следующее (на первый взгляд несимметричное) определение

$$\pi(P, Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ P(F) \leqslant Q(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ для всех замкнутых } F \subset \mathcal{X}\}. \quad (6.39)$$

Упр. 6.27. Докажите, что $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \pi)$ – польское пространство.

Теорема Д6.28. *$Q_n \Rightarrow Q$ равносильно тому, что $\pi(Q_n, Q) \to 0$ $(n \to \infty)$.*

□ Пусть $\pi(Q_n, Q) \to 0$. Тогда в силу (6.41) для любого $\varepsilon > 0$ и каждого замкнутого $F \subset \mathcal{X}$ имеем $Q_n(F) \leqslant Q(F^\varepsilon) + \varepsilon$ при всех $n \geqslant n(\varepsilon)$. Следовательно, $\limsup_{n\to\infty} Q_n(F) \leqslant Q^\varepsilon(F) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Остается устремить ε к нулю и воспользоваться пунктом 1° теоремы 6.2.

Обратно. Пусть $Q_n \Rightarrow Q$. Совокупность функций $f_\varepsilon^F(\cdot)$, введенных при доказательстве теоремы 6.2, где $\varepsilon > 0$ и F – замкнутое множество в $\mathcal{X}$, такова, что $0 \leqslant f_\varepsilon^F(\cdot) \leqslant 1$ и $|f_\varepsilon^F(x) - f_\varepsilon^F(y)| \leqslant \varepsilon^{-1}\rho(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{X}$ (объясните). Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ класс $\mathcal{M}_\varepsilon = \{f_\varepsilon^F(\cdot)$, множества F замкнуты в $\mathcal{X}\} \subset \mathcal{G}_1$, где классы $\mathcal{G}_C$ введены в лемме Д6.25. Из (6.37) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\Delta_n^{(\varepsilon)} = \sup\{|\langle f, Q_n\rangle - \langle f, Q\rangle| : \ f \in \mathcal{M}_\varepsilon\} \to 0, \ n \to \infty. \quad (6.40)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ и всех замкнутых F, учитывая, что $\mathbb{1}_F(\cdot) \leqslant f_\varepsilon^F(\cdot) \leqslant \mathbb{1}_{F^\varepsilon}(\cdot)$, принимая во внимание определение $\Delta_n^{(\varepsilon)}$ получаем

$$Q(F^\varepsilon) \geqslant \langle f_\varepsilon^F, Q\rangle \geqslant \langle f_\varepsilon^F, Q_n\rangle - \Delta_n^{(\varepsilon)} \geqslant \langle \mathbb{1}_F, Q_n\rangle - \Delta_n^{(\varepsilon)} = Q_n(F) - \Delta_n^{(\varepsilon)}. \quad (6.41)$$

Остается заметить, что $\Delta_n^{(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ и воспользоваться (6.39). □

Упр. 6.29. Рассмотрим банахово пространство BL ограниченных действительных липшицевых функций на $\mathcal{X}$, снабженное нормой $\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + L(f)$, см. (6.30). Докажите, что функция

$$\|P-Q\|_{BL}^* = \sup\{|\langle f, P\rangle - \langle f, Q\rangle| : \ f \in BL, \ \|f\|_{BL} \leqslant 1\}$$

задает **метрику на $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, сходимость в которой также эквивалентна слабой сходимости**. Более того, докажите для любых $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ неравенства

$$\|P-Q\|_{BL}^* \leqslant 2\pi(P,Q), \quad \varphi(\pi(P,Q)) \leqslant \|P-Q\|_{BL}^*,$$

где $\varphi(t) = 2t^2/(t+2)$, $t \geqslant 0$.

Теорема Д6.30 (Штрассен, [?]). *Метрика Леви – Прохорова π является минимальной метрикой для метрики Ки Фан $\varkappa$ (метризующей сходимость по вероятности). А именно,*

$$\pi(P,Q) = \inf\{\varkappa(X,Y)\}, \tag{6.42}$$

где нижняя грань берется по всем парам случайных величин (X, Y) (каждая пара задана на своем вероятностном пространстве) таким, что $\mathcal{L}(X) = P$, $\mathcal{L}(Y) = Q$, а $\varkappa(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ P(\rho(X,Y) > \varepsilon) < \varepsilon$.

Соотношение (6.42) иллюстрирует общую идею *каплинг-метода* (т.е. метода некоторой склейки), состоящего в том, что ищется пара случайных элементов (X, Y), с заданными *маргинальными распределениями* (т.е. заданы $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$) такая, что при этом X и Y близки в определенном смысле. Использованию различных метрик в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин посвящены монографии [?], [?]. Отметим, что **метрический подход является очень полезным в теории случайных процессов**. Например, **при весьма широких условиях можно дать оптимальную оценку скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера – Прохорова**. Пусть $X_{n,i}$, $i = 1, \dots, m_n$; $n \in \mathbb{N}$ – последовательность серий невырожденных случайных величин, независимых в каждой серии, для которых $\mathsf{E}X_{n,i} = 0$, $\mathsf{E}|X_{n,i}|^s < \infty$ при некотором $s > 2$. Будем считать $X_{n,i}$ нормированными так, что $\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = 1$, где $\sigma_{n,i}^2 = \mathsf{D}X_{n,i}$. Положим $L_{n,s} := \sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}|X_{n,i}|^s$. Это – *дробь Ляпунова* (если бы не было описанной выше нормировки, то $L_{n,s} = \sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}|X_{n,i} - \mathsf{E}X_{n,i}|^s \Big/ \left(\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2\right)^{s/2}$ и действительно возникала бы дробь). Легко видеть (простое упражнение), что *условие Ляпунова*

$$L_{n,s} \to 0 \text{ при } \ n \to \infty$$

влечет условие Линдеберга (6.18). Здесь же заметим, что условие Линдеберга является не только достаточным, но и необходимым для выполнения ЦПТ (см. приложение 2), если независимые слагаемые удовлетворяют "*условию бесконечной малости*": для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m_n} P(|X_{n,i}| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{6.43}$$

Необходимые и достаточные условия выполнения ЦПТ без предположения (6.43) можно найти в [?], [?].

Теорема Д6.31 (Боровков, [?]). *Пусть P_n – распределение случайной ломаной $S_n(\cdot)$, фигурирующей в теореме 6.11. Тогда для описанных выше серий (нормированных) величин $X_{n,i}$, $i = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbb{N}$, при $s \in (2, 3]$ справедлива следующая оценка:*

$$\pi(P_n, \mathbf{W}) \leqslant c L_{n,s}^{1/(s+1)}, \tag{6.44}$$

здесь $\mathbf{W}$ – мера Винера в $C[0,1]$, а множитель c не зависит от n.

Подробное доказательство этого результата вместе с необходимым вспомогательным материалом можно найти в [?], где также разобран пример из [?], показывающий, что **оценка** (6.44) **оптимальна с точностью до выбора постоянного множителя** c.

Приведем еще **несколько результатов о слабой сходимости и компактности распределений процессов с непрерывными траекториями**. Определим в пространстве $C(T, \mathcal{X})$ модуль непрерывности

$$\Delta(f, \delta) = \sup\{\rho(f(x), f(y)) : \, d(x, y) \leqslant \delta\}, \; f \in C(T, \mathcal{X}), \; \delta > 0,$$

здесь d – метрика на компакте T, ρ – метрика в польском пространстве $\mathcal{X}$. Нетрудно видеть, что при любом фиксированном $\delta > 0$ функция $\Delta(f, \delta)$ непрерывно отображает $C(T, \mathcal{X})$ в $\mathbb{R}$ и поэтому $\mathcal{B}(C(T, \mathcal{X}))|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измерима.

Теорема Д6.32 (Прохоров). *Последовательность распределений с.э. $X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ со значениями в $C(T, \mathcal{X})$, где T – компакт, а $\mathcal{X}$ – польское пространство, плотна тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{E}(\Delta(X^{(n)}, \delta) \wedge 1) = 0.$$

Рассмотрим теперь пространство $C(T, \mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ – метрическое пространство, а T – локально компактное хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности (последнее означает, что в пространстве имеется счетная база). Снабдим $C(T, \mathcal{X})$ топологией равномерной сходимости на компактах (см. (3.20)).

Упр. 6.33. Докажите, что $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, т.е. $\mathcal{L}(X^{(n)}) \Rightarrow \mathcal{L}(X)$ во введенном выше пространстве $C(T, \mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда $X^{(n)}_{|K} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_{|K}$ в $C(K, \mathcal{X})$ для любого компакта $K \subset T$, здесь, как и прежде $Y_{|K}$ означает сужение функции $Y = \{Y_t, \, t \in T\}$ до функции $Y_{|K} = \{Y_t, \, t \in K\}$.

Это упражнение, упр. 6.9 и теорема 6.11 обеспечивают

Упр. 6.34. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р. случайные векторы в $\mathbb{R}^m$, для которых $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, $\mathsf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Докажите, что процессы

$$X_t^{(n)} = n^{-1/2} \sum_{k \leqslant nt} \xi_k + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}, \; t \geqslant 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

сходятся по распределению при $n \to \infty$ к m – мерному броуновскому движению ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа).

Упр. 6.35. Пусть $X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ – непрерывные процессы на $\mathbb{R}^d$ со значениями при каждом $t \in \mathbb{R}^d$ в метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Тогда их распределения плотны в $C(\mathbb{R}^d, \mathcal{X})$, если для некоторых констант $\alpha, \beta > 0$

$$\mathsf{E}(\rho(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}))^\alpha \leqslant \|t - s\|^{d+\beta}, \; s, t \in \mathbb{R}^d,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^d$.

В связи с теоремой Д6.8 заметим, что **аппарат характеристических функций действует не только для мер на борелевских подмножествах** $\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{X}$ – действительное сепарабельное банахово пространство и $\mathcal{X}^*$ – сопряженное пространство. *Характеристическим функционалом* меры $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ или случайного элемента $X : \Omega \to \mathcal{X}$, $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathcal{X})$, такого, что $\mathcal{L}(X) = Q$, называется отображение $\varphi_Q : \mathcal{X}^* \to \mathbb{C}$, которое определяется формулой

$$\varphi_Q(x^*) = \mathsf{E}\exp\{i\langle X, x^*\rangle\},\ x^* \in \mathcal{X}^*,$$

здесь $\langle y, x^*\rangle$ обозначает действие линейного функционала x^* на элемент $y \in \mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{C}$ – совокупность цилиндрических множеств в $\mathcal{X}$, т.е. множеств вида

$$\{x \in \mathcal{X} : (\langle x, z_1^*\rangle, \dots, \langle x, z_n^*\rangle) \in B\},$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $z_1^*, \dots, z_n^* \in \mathcal{X}^*$.

Упр. 6.36. (сравните с теоремой Д6.8) Докажите, что $\mathcal{C}$ порождает $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Докажите, что если $Q_n \Rightarrow Q$ в $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, то $\varphi_{Q_n} \to \varphi_Q$ поточечно. Обратно, пусть $\varphi_{Q_n} \to \varphi_Q$ поточечно, где $\varphi : \mathcal{X}^* \to \mathbb{C}$ и последовательность $\{Q_n\}$ плотна. Тогда $\varphi = \varphi_Q$ для некоторого $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ и $Q_n \Rightarrow Q$.

О характеристических функционалах можно прочитать в [?].

По схеме изучения слабой сходимости в пространстве $C(T, \mathcal{X})$ **может быть проведено исследование слабой сходимости в пространстве Скорохода** $D([0,1]^q)$ **или** $D([0,\infty)^q)$, $q \geqslant 1$. Эти пространства состоят из функций, определенных соответственно на $[0,1]^q$ или $[0,\infty)^q$, принимающих действительные значения и таких, что они непрерывны сверху в каждой точке, и в каждой точке $t \neq 0$ имеют предел снизу (предел функции f сверху в точке t означает, что берется предел $f(s)$ при $s \to t$ для $s \neq t$ таких, что $s_k \geqslant t_k$, $k = 1, \dots, q$; аналогично определяется предел снизу). **Эти пространства с помощью определенных метрик могут быть превращены в польские**, в них также определен аналог модуля непрерывности. Важность использования пространств Скорохода по сравнению с пространствами непрерывных функций заключается в том, что близкими оказываются не только функции, получающиеся "малой деформацией" в области значений, но и функции, получающиеся "малой деформацией" аргумента (например, функции $f_x(t) = \mathbb{1}_{[x,\infty)}(t)$ и $f_y(t) = \mathbb{1}_{[y,\infty)}(t)$ не сближаются в пространстве C при $x \to y$, но сближаются в D). С этими вопросами можно основательно ознакомиться в [?], [?].

В связи с пространствами Скорохода интересно обдумать следующую **модель блуждающей частицы**. Пусть $Y_1^{(a)}, Y_2^{(a)} \dots$ – н.о.р. величины и

$$P(Y_1^{(a)} = -a) = P(Y_1^{(a)} = a) = 1/2,\ a > 0.$$

Пусть $\xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}, \dots$ – н.о.р. величины, экспоненциально распределенные с параметром $\lambda > 0$, причем последовательности $\{Y_n^{(a)}\}$ и $\{\xi_m^{(\lambda)}\}$ независимы при всех a и λ. Пусть состояния частицы изменяются на a или $-a$ в моменты $\tau_k^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^k \xi_j^{(\lambda)}$, $k = 1, 2, \dots$ (в момент $t = 0$ частица находится в нуле). Точнее говоря, пусть в момент $\tau_k^{(\lambda)}$ координата частицы равна $\sum_{j=1}^k Y_j^{(a)}$ и это состояние сохраняется на промежутке $[\tau_k^{(\lambda)}), \tau_{k+1}^{(\lambda)})$. Итак, положение частицы описывает процесс $X_t^{(a,\lambda)} = \sum_{j \leqslant N_\lambda(t)} Y_j^{(a)}$, $t \geqslant 0$, где $N_\lambda(t) = \max_{\{} k : \tau_k^{(\lambda)} \leqslant t\}$ (считаем $N_\lambda(0) = 0$, $X_0^{(a,\lambda)} = 0$). В лекции 8 мы увидим, что $N_\lambda(\cdot)$ – пуассоновский процесс. Интерес представляет

Упр. 6.37. Исследуйте сходимость к.-м.р. процессов $X^{(a,\lambda)}$ при условии, что $a \to 0$, $\lambda \to \infty$ таким образом, что $a^2\lambda = \sigma^2 > 0$ (величина смещения уменьшается, а соударения учащаются). Будут ли процессы $X^{(a,\lambda)}$ слабо сходиться в пространстве $D[0,\infty)$?

Наряду с принципом инвариантности Донскера – Прохорова очень важную роль играют **сильные принципы инвариантности**. А именно, если задана последовательность независимых (или должным образом "слабо зависимых") величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ со значениями в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^m$ или даже банаховом пространстве), то можно перейти к новой последовательности $\eta_1, \eta_2, \dots$, заданной на, вообще говоря, другом вероятностном пространстве вместе с броуновским движением $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ так, что (при выполнении некоторых условий!) $\mathcal{L}(\xi_1, \xi_2, \dots) = \mathcal{L}(\eta_1, \eta_2, \dots)$ и

$$\sum_{k \leqslant t} \eta_k - W(t) = O(h(t)) \text{ п.н. при } \ t \to \infty, \tag{6.45}$$

где h – определенная неслучайная положительная функция. Запись (6.45) означает существование для п.в. $\omega \in \Omega$ такого $C(\omega) > 0$, что

$$|\sum_{k \leqslant t} \eta_k - W(t)| \leqslant C(\omega) h(t)$$

при $t > t_0(\omega, C(\omega))$.

Вместо (6.45) рассматривается и соотношение вида

$$\sum_{k \leqslant t} \eta_k - W(t) = \overline{\overline{o}}(g(t)) \text{ п.н. при } \ t \to \infty, \tag{6.46}$$

означающее, что $|\sum_{k \leqslant t} \eta_k - W(t)|/g(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для п.в. $\omega \in \Omega$, где g – некоторая неслучайная функция.

Теорема Д6.38 (Штрассен). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathsf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathsf{E}\xi_1^2 = 1$. Тогда справедливо утверждение* (6.46)*, в котором $g(t) = (t \log\log t)^{1/2}$, $t > e$.*

Доказательство этой теоремы было основано на представлении Скорохода, см. дополнение 4, с. ??. Другой мощный метод получения оценок вида (6.45), так называемый *"венгерский метод"*, был предложен Комлошем, Майором и Тушнади [?], [?]. Здесь же заметим, что наряду с аппроксимациями винеровским процессом используются приближения с помощью некоторой последовательности гауссовских величин. О сильном принципе инвариантности см. также [?], [?].

Упр. 6.39. С помощью теоремы Д6.38 докажите функциональный закон повторного логарифма для случайных ломаных в $C[0,1]$, построенных по н.о.р. величинам $\xi_1, \xi_2, \dots$ с нулевым средним и единичной дисперсией. Эти ломаные имеют узлы $(k/n,\ S_k/\sqrt{2n\log\log n})$, $k = 0, \dots, n$, $n \geqslant 3$, $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k \geqslant 1$.

Упр. 6.40. Используя предыдущее упражнение, получите теорему Хартмана – Винтнера: пусть $X_1, X_2, \dots$ – н.о.р. величины с $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 = 1$. Тогда с вероятностью 1 множество предельных точек $\{S_n/\sqrt{2n\log\log n},\ n \geqslant 3\}$ совпадает с отрезком [-1,1] (здесь $S_n = X_1 + \ldots + X_n$).

С помощью упр. 6.39 и построения надлежащего отображения $h : C[0,1] \to \mathbb{R}$ выполняется

Упр. 6.41. Пусть $\{X_k\}$, $\{S_k\}$ – те же, что в упражнении 6.40. Пусть $f(t)$ – действительная функция, интегрируемая по Риману на [0,1]. Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{n\to\infty}(2n^3\log\log n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)S_k = \left(\int_0^1 F^2(u)du\right)^{1/2},$$

где $F(u)=\int_u^1 f(t)dt$, $u\in[0,1]$.

Затронем еще очень интересный вопрос, относящийся к *случайным мерам*. Пусть $\mathcal{X}$ – локально компактное хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности. Пусть $M(\mathcal{X})$ – пространство локально ограниченных мер на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (т.е. конечных на совокупности $\mathcal{M}$ ограниченных множеств), снабженное топологией, в которой непрерывны отображения

$$\pi_f : \mu \mapsto \langle f,\mu\rangle = \int_{\mathcal{X}} f d\mu$$

для $f\in C_K^+$ – классу непрерывных неотрицательных функций с компактным носителем.

Упр. 6.42. Докажите, что $M(\mathcal{X})$ – польское пространство. Для этого заметьте, что если $f_1, f_2, \ldots$ – множество, плотное в C_K^+, то функция

$$\rho(\mu,\nu)=\sum_k 2^{-k}(|\langle f,\mu\rangle - \langle f_k,\mu\rangle|\wedge 1),\ \mu,\nu\in M(\mathcal{X})$$

метризует введенную топологию. При этом $\mathcal{B}(M(\mathcal{X}))$ порождается как отображениями π_f, $f\in C_K^+$ (т.е. является наименьшей σ-алгеброй, относительно которой измеримы все эти отображения), так и отображениями $\pi_B : \mu\mapsto\mu(B)$ для $B\in\mathcal{X}_\mu$, где $\mu\in M(\mathcal{X})$, $\mathcal{X}_\mu=\{B\in\mathcal{M} : \mu(\partial B)=0\}$, а $\mathcal{M}$ – совокупность ограниченных подмножеств $\mathcal{X}$.

Если $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – вероятностное пространство и $X\in\mathcal{F}|\mathcal{B}(M(\mathcal{X}))$, то X называется *случайной мерой. Точечный случайный процесс* определяется как случайная мера, принимающая значения в (замкнутом относительно введенной топологии) подмножестве $N(\mathcal{X})\subset M(\mathcal{X})$, состоящем из целочисленно – значных мер.

Упр. 6.43. Пусть $Y, Y_1, Y_2,\ldots$ – случайные меры на $\mathcal{X}$ – локально компактном хаусдорфовом пространстве со второй аксиомой счетности. Докажите, что следующие условия эквивалентны

1. $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ при $n\to\infty$.
2. $\langle f, Y_n\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle f, Y\rangle$ для $f\in C_K^+$ $(n\to\infty)$.
3. $(Y_n(B_1),\ldots,Y_n(B_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y(B_1),\ldots,Y(B_k))$ для $B_1,\ldots,B_k\in\mathcal{X}_Y$, $k\in\mathbb{N}$, где $\mathcal{X}_Y=\{B\in\mathcal{M} : Y(\partial B)=0 \text{ п.н.}\}$.

Отметим, что для процессов, индексированных одномерным параметром, важные для приложений мартингальные методы исследования слабой сходимости изложены в [?], [?]. В дополнении к лекции 8 мы рассмотрим также некоторые результаты о слабой сходимости, требующие аппарата марковских полугрупп. К уже упоминавшимся источникам, связанным со сходимостью мер и процессов, мы добавим [?].

Лекция 7. Марковские процессы

Эквивалентные определения марковского процесса. Лемма об аппроксимации $\sigma\{X_t,\ t \in U\} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримых функций. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в $\mathbb{R}^d$. Марковость d-мерного броуновского движения и пуассоновского процесса. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции d-мерного броуновского движения. Однородные процессы. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию.

Теперь мы перейдем к изучению обширного класса **марковских процессов**. Замечательная идея Маркова, лежащая в основе всей развиваемой теории, состоит в том, что **выделяется класс процессов, для которых эволюция во времени может быть описана следующим образом. Поведение процесса после момента t определяется не всей его предысторией, а лишь значением, которое процесс принял в момент t.** Здесь уместна аналогия с классическим движением частицы, траектория которой после момента t определяется лишь ее положением (координатами) и скоростью в момент t. Если время дискретно ($t = 0, 1, \dots$), то сказанное особенно наглядно. А именно, то, что происходит после момента n оказывается связанным лишь с тем, что было в момент n. Получается, что поведение изучаемого объекта представляет как бы последовательность шагов, где каждый шаг определяется предыдущим. Отсюда и возникло понятие цепи Маркова (каждое звено цепи прикрепляется к предыдущему), послужившее основой дальнейших обобщений.

Формализуем сказанное и получим ряд эквивалентных определений. Некоторые обобщения отнесены в дополнение. **Начнем с симметричного определения.** Пусть $X = \{X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$ — случайный процесс, заданный на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающий значения при каждом t в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. С.п. X называется *марковским*, если для любого $t \in T$ и любых событий $A \in \mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{X_s\colon\ s \in T \cap (-\infty, t]\}$, $B \in \mathcal{F}_{\geqslant t} = \sigma\{X_s\colon\ s \in T \cap [t, \infty)\}$ верно равенство

$$P(AB \mid X_t) = P(A \mid X_t) P(B \mid X_t) \ \text{ п.н.} \tag{7.1}$$

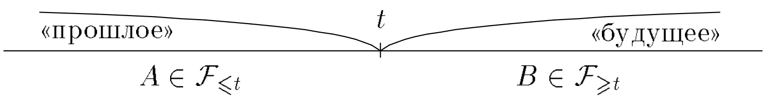

Рис. 7.1

Формула (7.1) означает, что **«будущее» и «прошлое» условно независимы при фиксированном «настоящем».**

Напомним, что $P(A \mid \mathcal{A}) := \mathsf{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{A})$ для $A \in \mathcal{F}$ и σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, а $\mathsf{E}(\xi \mid \eta) := \mathsf{E}(\xi \mid \sigma\{\eta\})$ для с.э. η и действительной с.в. ξ. Таким образом, основным является понятие условного математического ожидания (у.м.о.) действительной с.в. ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ (обозначается $\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A})$). А именно, это такая функция $\zeta\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$, что она 1) $\mathcal{A} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измерима, 2) для каждого $C \in \mathcal{A}$

$$\mathsf{E}\zeta \mathbb{1}_C = \mathsf{E}\xi \mathbb{1}_C.$$

С помощью теоремы Радона–Никодима доказывается, что если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, то такая величина ζ существует и определена однозначно с точностью до эквивалентности

($\zeta_1 \sim \zeta_2$, если $P(\zeta_1 = \zeta_2) = 1$). Для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ полагаем $\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}) = (\mathsf{E}(\xi_1 \mid \mathcal{A}), \ldots, \mathsf{E}(\xi_n \mid \mathcal{A}))$ в предположении, что существуют математические ожидания компонент.

Лемма 7.1. *X — марковский процесс тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ и всех ограниченных F и G, соответственно $\mathcal{F}_{\leqslant t} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$- и $\mathcal{F}_{\geqslant t} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримых, выполнено равенство*

$$\mathsf{E}(FG \mid X_t) = \mathsf{E}(F \mid X_t)\mathsf{E}(G \mid X_t) \quad \text{п.н.} \tag{7.2}$$

□ Очевидно, (7.1) есть частный случай (7.2), когда $F = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$ и $G = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$. Выведем (7.2) из (7.1). Пользуясь линейностью у.м.о. ($\mathsf{E}(\alpha\xi + \beta\zeta \mid \mathcal{A}) = \alpha\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}) + \beta\mathsf{E}(\zeta \mid \mathcal{A})$ п.н. для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\zeta| < \infty$) получаем, что (7.2) будет справедливо для «простых» функций вида

$$F = \sum_{i=1}^{M} c_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad G = \sum_{j=1}^{N} d_j \mathbb{1}_{B_j},$$

где $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$, $B_j \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$.

Любая $\mathcal{A} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая ограниченная функция h (пусть $\sup\limits_{\omega\in\Omega} |h(\omega)| < H$) есть равномерный предел «простых» $\mathcal{A} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримых функций $h_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbb{1}_{D_{n,k}}$, где $r_{n,k} = -H + kH2^{-n+1}$, $D_{n,k} = \{\omega\colon\ r_{n,k} < h(\omega) \leqslant r_{n,k} + H2^{-n+1}\} \in \mathcal{A}$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. При этом $\sup\limits_{\omega\in\Omega} |h_n(\omega)| \leqslant H$ и

$$\sup_{\omega\in\Omega} |h_n(\omega) - h(\omega)| \leqslant H2^{-n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.3}$$

Но тогда $\mathsf{E}(h_n \mid \mathcal{A}) \to \mathsf{E}(h \mid \mathcal{A})$ п.н. ($|\mathsf{E}(h_n \mid \mathcal{A}) - \mathsf{E}(h \mid \mathcal{A})| \leqslant \mathsf{E}(|h_n - h| \mid \mathcal{A}) \leqslant H2^{-n+1}$). Остается учесть, что если $\zeta_n \to \zeta$ п.н. и $\tilde{\zeta}_n \to \tilde{\zeta}$ п.н. при $n \to \infty$ и вдобавок $\zeta_n = \tilde{\zeta}_n$ п.н. ($n \in \mathbb{N}$), то $\zeta = \tilde{\zeta}$ п.н. □

Лемма 7.2. *Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы $\mathcal{F} \,|\, \mathcal{B}$-измеримые с.э. X_t, $t \in U$, со значениями в пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Тогда любая $\sigma\{X_t,\ t \in U\} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая ограниченная величина h ($\sup\limits_{\omega} |h(\omega)| < H$) может быть получена как предел п.н. и как предел в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ последовательности конечных сумм со слагаемыми вида $f_1(X_{s_1}) \ldots f_m(X_{s_m})$. Здесь f_i — ограниченные $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримые функции, несовпадающие друг с другом точки $s_i \in U$, $i = 1, \ldots, m$ (для каждой суммы и для каждого слагаемого предполагается свой выбор $m \in \mathbb{N}$, точек s_i и функций f_i, $i = 1, \ldots, m$).*

□ Положим $\mathcal{A} = \sigma\{X_t,\ t \in U\}$ и выберем, как при доказательстве леммы 7.1, функции $h_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbb{1}_{D_{n,k}}$, $D_{n,k} \in \mathcal{A}$. Теперь заметим (см. текст перед теоремой 4.3), что $\mathcal{A} = \sigma\{\mathfrak{A}\}$, где алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из множеств вида $L = \{\omega\colon\ (X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) \in C\}$, а

$$C = \bigcup_{j=1}^{q} (C_{1j} \times \ldots \times C_{mj}), \quad s_1, \ldots, s_m \in U, \quad C_{ij} \in \mathcal{B},$$
$$i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, q; \quad m, q \in \mathbb{N}, \tag{7.4}$$

причем объединяемые прямоугольники не пересекаются.

Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $D \in \mathcal{A}$ (см. доказательство леммы 4.2) найдется $L_\varepsilon \in \mathfrak{A}$: $P(D \triangle L_\varepsilon) < \varepsilon$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$, всех $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ и любого $\varepsilon_n \in (0,1)$ можно найти множества $L_{n,k} \in \mathfrak{A}$, такие что $P(D_{n,k} \triangle L_{n,k}) < \varepsilon_n 2^{-n}$. Полагая $\tilde{h}_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbb{1}_{L_{n,k}}$, имеем

$$\mathsf{E}|h_n - \tilde{h}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1} |r_{n,k}| \mathsf{E}|\mathbb{1}_{D_{n,k}} - \mathbb{1}_{L_{n,k}}| = \\ = \sum_{k=0}^{2^n-1} |r_{n,k}| P(D_{n,k} \triangle L_{n,k}) \leqslant H 2^n \cdot \varepsilon_n 2^{-n} = H\varepsilon_n. \quad (7.5)$$

Следовательно, $\mathsf{E}|h - \tilde{h}_n| \leqslant H2^{-n+1} + H\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, в силу (7.3) и (7.5). Поэтому $\tilde{h}_n \to h$ при $n \to \infty$ в пространстве $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Следует учесть, что если последовательность сходится в среднем, то сходится и по вероятности, а значит, имеется подпоследовательность, сходящаяся п.н. Остается заметить, что для $L \in \mathfrak{A}$, где C задается соотношением (7.4),

$$\mathbb{1}_L(\omega) = \sum_{j=1}^{q} \mathbb{1}_{C_{1j}}(X_{s_1}(\omega)) \ldots \mathbb{1}_{C_{mj}}(X_{s_m}(\omega)). \quad (7.6)$$

Более того, **нетрудно обеспечить, чтобы все аппроксимирующие суммы, упомянутые в теореме, также по модулю не превосходили** H. Для этого достаточно от, вообще говоря, пересекающихся множеств $L_{n,k}$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ перейти к непересекающимся множествам $\widehat{L}_{n,0} = L_{n,0}$ и $\widehat{L}_{n,k} = L_{n,k} \setminus \cup_{j=0}^{k-1} L_{n,j}$ при $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, а затем положить $\widehat{h}_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbb{1}_{\widehat{L}_{n,k}}$, $n \in \mathbb{N}$ (при этом ε_n выберем так, чтобы $\varepsilon_n 2^n \to 0$, когда $n \to \infty$). $\square$

Следствие 7.3. *Для проверки марковости процесса X достаточно рассмотреть произвольные $m, n \in \mathbb{N}$, любые $s_1 < \ldots < s_m \leqslant t \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ (все они берутся из T) и убедиться, что (7.2) выполнено для*

$$F = f_1(X_{s_1}) \ldots f_m(X_{s_m}), \quad G = g_1(X_{t_1}) \ldots g_n(X_{t_n}), \quad (7.7)$$

где f_i и g_j — ограниченные $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримые функции, причем в (7.7) достаточно брать

$$f_i = \mathbb{1}_{C_i}, \quad g_j = \mathbb{1}_{D_j}, \quad \textit{где} \;\; C_i \in \mathcal{B}, \quad D_j \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \quad (7.8)$$

$\square$ Следует учесть линейность у.м.о. и воспользоваться леммами 7.2 и 7.1. Кроме того, для h и $\tilde{h}_n$, фигурирующих в доказательстве леммы 7.2,

$$\mathsf{E}|\mathsf{E}(\tilde{h}_n \mid X_t) - \mathsf{E}(h \mid X_t)| \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}|\tilde{h}_n - h| \mid X_t) = \mathsf{E}|\tilde{h}_n - h|.$$

Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{n_k\}$, такую что $\mathsf{E}(\tilde{h}_{n_k} \mid X_t) \to \mathsf{E}(h \mid X_t)$ п.н. при $k \to \infty$. $\square$

Лемма 7.4. *X — марковский процесс тогда и только тогда, когда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и любых $s_1 < \ldots < s_m \leqslant t \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ (все точки берутся из T), а также для всех ограниченных $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримых функций $g_1, \ldots, g_n$*

$$\mathsf{E}(G \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_t) = \mathsf{E}(G \mid X_t) \quad \textit{п.н.}, \quad (7.9)$$

где G определена в (7.7), причем в (7.7) достаточно рассматривать лишь функции g_j вида (7.8).

□ По свойствам у.м.о. (см., например, [?, гл. 2, §7]), если ξ есть $\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая с.в., а с.в. ζ такова, что $\mathsf{E}|\zeta| < \infty$, $\mathsf{E}|\xi\zeta| < \infty$, то $\mathsf{E}(\xi\zeta \mid \mathcal{A}) = \xi\mathsf{E}(\zeta \mid \mathcal{A})$ п.н. Кроме того, если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$ и σ-алгебры $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$, то

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}_1) \mid \mathcal{A}_2) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1) = \mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}_1) \text{ п.н.} \tag{7.10}$$

Пусть выполнено (7.9). Тогда для F и G, определенных в (7.7), имеем

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(FG \mid X_t) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(FG \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) \mid X_t) = \\ &\quad = \mathsf{E}(F\mathsf{E}(G \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) \mid X_t) = \mathsf{E}(F\mathsf{E}(G \mid X_t) \mid X_t) = \\ &\quad = \mathsf{E}(G \mid X_t)\mathsf{E}(F \mid X_t)\end{aligned}$$

(все равенства с у.м.о., как всегда, понимаются как равенства с вероятностью 1).

Пусть теперь выполнено (7.2). С.в. $\mathsf{E}(G \mid X_t)$ является $\sigma\{X_t\}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой. Поэтому для доказательства (7.9) достаточно проверить, что $\mathsf{E}\mathbb{1}_C\mathsf{E}(G \mid X_t) = \mathsf{E}\mathbb{1}_C G$ для любого $C \in \sigma\{X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t\}$. Учитывая, что $\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A})) = \mathsf{E}\xi$ для $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ при $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, имеем согласно (7.2)

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_C G = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}_C G \mid X_t)) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}_C \mid X_t)\mathsf{E}(G \mid X_t)).$$

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_C\mathsf{E}(G \mid X_t) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}_C\mathsf{E}(G \mid X_t) \mid X_t)) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(G \mid X_t)\mathsf{E}(\mathbb{1}_C \mid X_t)). \ \square$$

Лемма 7.5. *Для марковости процесса X (необходимо и) достаточно выполнение условий леммы 7.4 только при $n = 1$.*

□ Возьмем G вида (7.7), где $n \geqslant 2$. Тогда, учитывая условие (7.9) при $n = 1$, получим

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(G \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \\ &\quad = \mathsf{E}(\mathsf{E}(G \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t, X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \\ &\quad = \mathsf{E}(g_1(X_{t_1}) \dots g_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathsf{E}(g_n(X_{t_n}) \mid X_{t_{n-1}}) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \\ &\quad = \mathsf{E}(g_1(X_{t_1}) \dots \tilde{g}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t),\end{aligned}$$

где $\tilde{g}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) = g_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathsf{E}(g_n(X_{t_n}) \mid X_{t_{n-1}})$. Мы воспользовались (см., например, [?, с. 236]) тем, что $\mathsf{E}(\xi \mid \zeta) = \varphi(\zeta)$, где φ — $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая функция (вид этой функции, конечно, зависит от ξ), а также тем, что $|\mathsf{E}(\xi \mid \zeta)| \leqslant H$ п.н., если $|\xi| \leqslant H$ п.н. Продолжая аналогичным образом, получим

$$\mathsf{E}(G \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \mathsf{E}(\tilde{g}_1(X_{t_1}) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \mathsf{E}(\tilde{g}_1(X_{t_1}) \mid X_t), \tag{7.11}$$

где $\tilde{g}_1(X_{t_1}) = g_1(X_{t_1})\mathsf{E}(\tilde{g}_2(X_{t_2}) \mid X_{t_n})$. Точно так же преобразовав $\mathsf{E}(G \mid X_t)$ (не вовлекая $X_{s_1}, \dots, X_{s_m}$), получим правую часть формулы (7.11). □

Очень удобное определение марковости содержит

Следствие 7.6. *X — марковский процесс тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ и всех $s_1 < \ldots < s_m \leqslant t \leqslant u$ (точки из T) и любого $C \in \mathcal{B}$*

$$P(X_u \in C \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = P(X_u \in C \mid X_t) \quad \textit{п.н.} \tag{7.12}$$

□ Взяв $g = \mathbb{1}_C$, получим (7.12) из леммы 7.5. Для доказательства в обратную сторону достаточно воспользоваться рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 7.1. □

Марковость процессов с независимыми приращениями обеспечивает

Теорема 7.7. *Пусть $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ — процесс с независимыми приращениями, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) и такой, что X_t является $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-измеримой величиной при каждом $t \geqslant 0$. Тогда X — марковский процесс.*

□ Имеем $\sigma\{X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_t\} = \sigma\{X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \ldots, X_t - X_{s_m}\}$, поскольку векторы в фигурных скобках связаны невырожденным линейным преобразованием. Нетрудно показать, используя лемму 7.2, что если ξ и ζ — независимые случайные векторы соответственно со значениями в $\mathbb{R}^q$ и $\mathbb{R}^l$ и $f\colon\ \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ есть борелевская функция (т. е. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{q+l})\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримое отображение), причем $\mathsf{E}|f(\xi,\zeta)| < \infty$, то

$$\mathsf{E}(f(\xi,\zeta) \mid \zeta = y) = \mathsf{E}f(\xi, y) \ \text{ п.н. по мере } P_\zeta \tag{7.13}$$

(запись $\mathsf{E}(\nu \mid \zeta = y)$ означает, что берется $\varphi(y)$, где $\varphi(\zeta) = \mathsf{E}(\nu \mid \zeta)$.

Теперь заметим, что для $0 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant t \leqslant u$ (точки из T) и ограниченной $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функции g

$$\mathsf{E}(g(X_u) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_t) = \mathsf{E}\left(g\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\,\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+1}\right),$$

где $\zeta_1 = X_{s_1}$, $\zeta_2 = X_{s_2} - X_{s_1}$, ..., $\zeta_m = X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$, $\zeta_{m+1} = X_t - X_{s_m}$, $\xi = X_u - X_t$. Следовательно, п.н. по распределению вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+1})$ имеем

$$\mathsf{E}\left(g\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) \mid \zeta_1 = y_1, \ldots, \zeta_{m+1} = y_{m+1}\right) = \mathsf{E}g\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} y_i\right) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{m+1} y_i\right),$$

где Ψ — борелевская функция. Действительно, функции $h_1(\omega, z) = \xi(\omega)$ и $h_2(\omega, z) = z$, заданные на $\Omega \times \mathbb{R}$, очевидно, являются $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми. Следовательно, суперпозиция $g(\xi(\omega) + z) = g((h_1 + h_2)(\omega, z))$ также является (ограниченной) $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функцией. Взяв на $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ меру $P \times Q$ (P и Q – полные меры соответственно на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, т.е. $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ пополнены), получим, что в силу теоремы Фубини (см. [**?**, с. 363]) $\int_\Omega g((h_1 + h_2)(\omega, z))dP$ будет борелевской функцией. Таким образом,

$$\mathsf{E}(g(X_u) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_t) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) \ \text{ п.н.}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(g(X_u) \mid X_t) &= \mathsf{E}\left(g\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) = \\
&= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(g\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\,\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+1}\right)\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) = \\
&= \mathsf{E}\left(\Psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right) \ \text{ п.н. } \square
\end{aligned}$$

Броуновским движением в $\mathbb{R}^m$ был назван процесс $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_m(t))$, $t \geqslant 0$, составленный из m независимых действительных винеровских процессов W_i (из m независимых с.э. со значениями в $C[0,\infty)$).

Следствие 7.8. *Броуновское движение в $\mathbb{R}^m$ является марковским процессом. Пуассоновский процесс является марковским процессом.*

Теперь мы введем переходную функцию, которая играет ключевую роль при построении марковских процессов.

Функция $P(s,x,t,B)$, определенная для $s \leqslant t$ $(s,t \in T \subset \mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$, называется *переходной функцией* (или марковской переходной функцией), если

1) при фиксированных s,x,t функция $P(s,x,t,\cdot)$ является мерой на $(\mathcal{X},\mathcal{B})$,

2) при фиксированных s,t,B функция $P(s,\cdot,t,B)$ является $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой,

3) $P(s,x,s,B) = \delta_x(B)$ при всех $s \in T$, $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$,

4) **при всех** $s < u < t$ $(s,u,t \in T)$, $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$ выполняется *уравнение* **Колмогорова – Чепмена**:

$$P(s,x,t,B) = \int_{\mathcal{X}} P(s,x,u,dy)P(u,y,t,B). \tag{7.14}$$

В силу требования 3) соотношение (7.14) будет верно и при $s \leqslant u \leqslant t$.

Говорят, что **марковский процесс** $\{X_t,\, t \in T\}$ **обладает переходной функцией** $P(s,x,t,B)$**, если** при всех $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$, $B \in \mathcal{B}$

$$P(X_t \in B \mid X_s) = P(s,X_s,t,B) \ \text{ п.н.}, \tag{7.15}$$

или, что то же самое, $P(s,x,t,B) = P(X_t \in B \mid X_s = x)$ п.н. по мере P_{X_s}. **Другими словами, существует «хороший» вариант условного распределения, стоящего в левой части формулы** (7.15).

Пользуясь свойствами у.м.о., **легко пояснить происхождение условия** (7.14). В силу (7.15), (7.10) и (7.12) для $s \leqslant u \leqslant t$, $(s,u,t \in T)$ и $B \in \mathcal{B}$ имеем

$$P(s,X_s,t,B) = \mathsf{E}(\mathbb{1}\{X_t \in B\}|X_s) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}\{X_t \in B\}|X_s,X_u)|X_s) =$$

$$= \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}\{X_t \in B\}|X_u)|X_s) = \mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s).$$

Иначе говоря, для P_{X_s} – почти всех x

$$P(s,x,t,B) = \mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s = x). \tag{7.16}$$

Остается учесть (см. [**?**, с. 242]), что если есть *регулярная условная вероятность* $\nu(C) = P(X_u \in C|X_s = x)$ (где ν зависит от s,u,x), то для любой ограниченной функции $g \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ получаем

$$\mathsf{E}(g(X_u)|X_s = x) = \int_{\mathcal{X}} g(y)\nu(dy) \ \ P_{X_s} - \text{п.н.} \tag{7.17}$$

Итак, из (7.16) и (7.17) **вытекает лишь ослабленный вариант равенства** (7.14), справедливый для P_{X_s}-почти всех x.

Пример 7.9. Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, — m-мерное броуновское движение. Тогда, применяя (7.13), получаем при $s < t$

$$\begin{aligned} &P(W(t) \in B \mid W(s) = x) = \mathsf{E}(\mathbb{1}_{\{W(t)-W(s)+W(s)\in B\}} \mid W(s) = x) = \\ &= \mathsf{E}\mathbb{1}_{\{W(t)-W(s)+x\in B\}} = P(W(t) - W(s) \in B - x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int\limits_{B-x} e^{\frac{-\|z\|^2}{2(t-s)}} dz = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int\limits_{B} e^{\frac{-\|z-x\|^2}{2(t-s)}} dz. \end{aligned}$$

При $t = s$ (используя (7.13) и учитывая независимость $W(s)$ и $0 \in \mathbb{R}^d$) имеем

$$P(W(s) \in B \mid W(s) = x) = P(W(s) + 0 \in B \mid W(s) = x) = P(x + 0 \in B) = \delta_x(B).$$

Итак, $P(s, x, s, B) = \delta_x(B)$, а при $s < t$

$$P(s, x, t, B) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int\limits_B e^{\frac{-\|y-x\|^2}{2(t-s)}} dy, \tag{7.18}$$

все требования 1)–4), очевидно, выполнены (для проверки (7.14) надо вспомнить, что свертка нормальных распределений дает нормальное распределение).

Марковский процесс $\{X_t,\ t \in T\}$, имеющий переходную функцию $P(s, x, t, B)$, называется *однородным*, если для всех $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$, $h > 0$ и $s, s + h \in T$

$$P(s, x, s + h, B) = P(0, x, h, B). \tag{7.19}$$

Правую часть формулы (7.19) будем обозначать $P(x, h, B)$, это условная вероятность попасть во множество B через время h, выйдя из точки x. Согласно (7.18), m-**мерное броуновское движение – однородный марковский процесс**. Для однородного марковского процесса $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ условия 1) – 4) на переходную функцию перепишутся для $s, t \geqslant 0$, $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$ в следующем виде:

1') при фиксированных x, t функция $P(x, t, \cdot)$ есть мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$,

2') при фиксированных t, B функция $P(\cdot, t, B) \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

3') $P(x, 0, B) = \delta_x(B)$ при всех x, B,

4')

$$P(x, s + t, B) = \int_{\mathcal{X}} P(x, s, dy) P(y, t, B). \tag{7.20}$$

Требование выполнения (7.20) **при всех рассматриваемых значениях аргументов позволяет применять мощный аппарат теории полугрупп.** Первоначальные сведения в этой области содержит дополнение к этой лекции.

Обратимся к нахождению к.-м.р. марковского процесса.

Лемма 7.10. *Пусть $X = \{X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$ — марковский процесс со значениями в пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, имеющий переходную функцию $P(s, x, t, B)$. Тогда для любых $s \leqslant t$ $(s, t \in T)$ и любой ограниченной $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функции $g(\cdot)$*

$$\mathsf{E}(g(X_t) \mid X_s) = \varphi(X_s) \quad \text{п.н.}, \tag{7.21}$$

где

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathcal{X}} P(s, x, t, dz) g(z) \tag{7.22}$$

является ограниченной $\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функцией (разумеется, вид φ зависит от g, s, t и переходной функции).

□ Пусть $g(\cdot) = \mathbb{1}_B(\cdot)$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\mathsf{E}(g(X_t) \mid X_s) = P(X_t \in B \mid X_s) = P(s, X_s, t, B) \ \text{ п.н.}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t,dz)\mathbb{1}_B(z) = P(s,x,t,B).$$

Следовательно, утверждение леммы верно для $g(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{B_k}$, $B_k \in \mathcal{B}$, $k = 1,\ldots,N$. Если g является $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функцией, причем $\sup\limits_{z\in\mathcal{X}} |g(z)| < H$, то, как при доказательстве леммы 7.1, находим «простые» $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримые функции g_k, которые равномерно сходятся к g (при этом $\sup\limits_{z\in\mathcal{X}} |g_k(z)| \leqslant H$, $k \in \mathbb{N}$) и для которых $\mathsf{E}(g(X_t) \mid X_s) = \lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{E}(g_k(X_t) \mid X_s)$ п.н.,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t,dz)g_k(z) \to \int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t,dz)g(z) \quad (k\to\infty).$$

$\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримость функций $\int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t,dz)g_k(z)$ для простых функций g_k следует из свойства 2) переходной функции, а $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримость $\int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t,dz)g(z)$ как функции x при фиксированных s и t вытекает из замечания 4.7 (все рассматриваемые σ-алгебры считаются пополненными). □

Лемма 7.11. *В условиях леммы 7.10 для любого $n \in \mathbb{N}$, всех $s \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ (точки из T) и любых $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримых ограниченных функций $g_1,\ldots,g_n$*

$$\mathsf{E}(g_1(X_{t_1})\ldots g_n(X_{t_n}) \mid X_s) = \Psi(X_s), \tag{7.23}$$

где

$$\Psi(x) = \int\limits_{\mathcal{X}} P(s,x,t_1,dz_1)g_1(z_1) \int\limits_{\mathcal{X}} P(t_1,z_1,t_2,dz_2)g(z_2)\ldots \int\limits_{\mathcal{X}} P(t_{n-1},z_{n-1},t_n,dz_n)g(z_n),$$

здесь интегрирование выполняется последовательно справа налево (каждый раз в силу леммы 7.10 интегрируется ограниченная измеримая функция).

□ Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ (7.23) превращается в утверждение леммы 7.10. Теперь добавим к точкам $s,t_1,\ldots,t_n$ еще точку $t_{n+1} \geqslant t_n$ и возьмем $\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримую ограниченную функцию g_{n+1}. Тогда, обозначив $G = g_1(X_{t_1})\ldots g(X_{t_n})$, с учетом (7.9), (7.10) и леммы 7.10 получим

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(g_1(X_{t_1})\ldots g_n(X_{t_n})g_{n+1}(X_{t_{n+1}}) \mid X_s) &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(Gg_{n+1}(X_{t_{n+1}}) \mid X_s, X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \mid X_s) = \\ &= \mathsf{E}(G\mathsf{E}(g_{n+1}(X_{t_{n+1}}) \mid X_{t_n}) \mid X_s) = \mathsf{E}(G\varphi_n(X_{t_n}) \mid X_s),\end{aligned}$$

где

$$\varphi_n(x) = \int\limits_{\mathcal{X}} P(t_n,x,t_{n+1},dz_{n+1})g_{n+1}(z_{n+1}).$$

Взяв $g_n\varphi_n$ вместо g_n и применив формулу (7.23) для функций $g_1,\ldots,g_{n-1},g_n\varphi_n$, получим (7.23) для функций $g_1,\ldots,g_{n+1}$. □

Теорема 7.12 (к.-м.р. марковского процесса). *При условиях леммы 7.10 для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $s \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ (точки из T) и всех $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$*

$$P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \int\limits_{\mathcal{X}} Q_s(dx) \int\limits_{B_1} P(s, x, t_1, dz_1) \ldots \int\limits_{B_n} P(t_{n-1}, z_{n-1}, t_n, dz_n), \tag{7.24}$$

где $Q_s = P_{X_s}$.

$\square$ Достаточно в лемме 7.11 взять $g_i = \mathbb{1}_{B_i}$ и учесть (7.23) и (2.10). Тогда

$$\mathsf{E}\Psi(X_s) = \int\limits_{\mathcal{X}} \Psi(x) Q_s(dx). \ \square$$

Замечание 7.13. Формула (7.24) дает вероятность попадания вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ в "прямоугольник" $B_1 \times \ldots \times B_n$, что позволяет однозначно определить вероятность попадания этого вектора в любое множество из $\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \times \ldots \times \mathcal{B}$. Пользуясь леммами 7.2 и 7.11, легко написать соответствующий аналог формулы (7.24). Если $v \leqslant s$ ($v, s \in T$), то для любого $B \in \mathcal{B}$

$$Q_s(B) = \int\limits_{\mathcal{X}} Q_v(dx) P(v, x, s, B). \tag{7.25}$$

$$\square\ Q_s(B) = P(X_s \in B) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}_{\{X_s \in B\}} \mid X_v)) = \\ = \mathsf{E}P(v, X_v, s, B) = \int\limits_{\mathcal{X}} Q_v(dx) P(v, x, s, B). \ \square$$

В частности, если $T = [0, \infty)$, то мера Q_s для любого $s > 0$ определяется по мере Q_0 и переходной функции (здесь уместна аналогия с гауссовскими процессами, распределения которых задавались двумя объектами – функцией среднего и ковариационной функцией).

Таким образом, **если $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ — марковский процесс со значениями в измеримом пространстве** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ (при каждом $t \geqslant 0$)**, который имеет переходную функцию, то его к.-м.р. полностью определяются заданием начального распределения** (т. е. меры $Q_0(B) = P(X_0 \in B)$, $B \in \mathcal{B}$) **и переходной функции** $P(s, x, t, B)$.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли построить марковский процесс, отправляясь от переходной функции и начального распределения. В весьма широких условиях ответ утвердительный, как показывает теорема Д7.1.

Дополнения и упражнения.

Определение марковости (7.1) и эквивалентные ему можно обобщать в различных направлениях. Прежде всего заметим, что **все рассуждения, проведенные в лекции 7, кроме утверждений 7.7 – 7.9, относящихся к процессам с независимыми приращениями, сохраняют свою силу, когда** $X = \{X_t, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ **– случайный процесс, заданный на каком-то вероятностном пространстве** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$**, и принимающий при каждом** t **значения в некотором измеримом пространстве** $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$. Другими словами, не всегда обязательно, чтобы у процесса в каждый момент t было одно и то же фазовое пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. При этом в определение переходной функции $P(s,x,t,B)$, где $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$, $x \in \mathcal{X}_s$, $B \in \mathcal{B}_t$, добавляется, что **налагаемые условия и теперь должны выполняться для всех возможных значений аргументов** x **и** B (области их изменения зависят соответственно от s и t). Например, уравнение Колмогорова – Чепмена запишется для $s \leqslant u \leqslant t$ $(s,u,t \in T)$, $x \in \mathcal{X}_s$, $B \in \mathcal{B}_t$ в виде

$$P(s,x,t,B) = \int\limits_{\mathcal{X}_u} P(s,x,u,dy)P(u,y,t,B), \tag{7.26}$$

а в формуле (7.15) надо будет указать, что $B \in \mathcal{B}_t$.

Начнем с построения марковского процесса по переходной функции и распределению в начальный момент времени.

Пусть $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ – измеримые пространства. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $s_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ (точки из T), а также $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$ **положим** (у нас нет другой возможности, если мы хотим построить указанный процесс) для $C = B_1 \times \ldots \times B_n$

$$Q_{t_1,\ldots,t_n}(C) = \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) \int\limits_{\mathcal{X}_{t_1}} P(s_0,x,t_1,dz_1)\mathbb{1}_{B_1}(z_1)\cdots \int\limits_{\mathcal{X}_{t_n}} P(t_{n-1},z_{n-1},t_n,dz_n)\mathbb{1}_{B_n}(z_n), \tag{7.27}$$

где Q_{s_0} – некоторая мера на $\mathcal{B}_{s_0}$. В (7.27) интегрирование ведется последовательно справа налево, каждый раз в силу леммы 7.10 получаются должным образом измеримые ограниченные функции. Покажем, что $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ – мера на полукольце прямоугольников вида $B_1 \times \ldots \times B_n$. Если $B_1 \times \ldots \times B_n = \cup_{q=1}^{\infty} B_1^{(q)} \times \ldots \times B_n^{(q)}$, где объединяемые прямоугольники не пересекаются ($B_k^{(q)} \in \mathcal{B}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$; $q \in \mathbb{N}$), то

$$\mathbb{1}_{B_1\times\ldots\times B_n}(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_1^{(q)}}(z_1)\cdots \mathbb{1}_{B_n^{(q)}}(z_n). \tag{7.28}$$

Теперь остается воспользоваться теоремой Б. Леви (см. [**?**, с. 348]), чтобы согласно (7.27) почленно проинтегрировать последовательно по каждой переменной ряд в правой части (7.28). Поэтому **можно считать** $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ **продолженной до меры на** $\mathcal{B}_{t_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{t_n}$.

Следующая теорема является обратной к теореме 7.12 (для польских фазовых пространств).

Теорема Д7.1. *Пусть* $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ *– польские пространства с борелевскими* σ*-алгебрами* $\mathcal{B}_t$, $t \in T \subset \mathbb{R}$. *Тогда введенные выше меры* $Q_{t_1,\ldots,t_n}$, *где* $t_1, \ldots, t_n \in T_{s_0} = T \cap [s_0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ *(считаем* $s_0 \in T$*), являются согласованными, и на некотором пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *существует марковский процесс* $X = (X_t,\ t \in T_{s_0})$, *имеющий* $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ *своими к.-м.р., при этом* $P(s,x,t,B)$ *есть переходная функция* X, *а* Q_{s_0} *– распределение* X_{s_0}.

□ В силу замечания 2.8 для построения процесса X с данными к.-м.р. $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ **достаточно проверить лишь условие** $3°$ со с. ??. При $2 \leqslant m \leqslant n-1$ (для $n \geqslant 3$) это условие тривиально вытекает из (7.26), а при $m = 1$ и $m = n$ для всех $u \leqslant t$ $(u,t \in T_{s_0})$ и $x \in \mathcal{X}_u$

$$\int\limits_{\mathcal{X}_t} P(u,x,t,dz) = P(u,x,t,\mathcal{X}_t) = 1.$$

Найдем P_{X_s} **для** $s \in T_{s_0}$. Возьмем $n = 1$ и $t_1 = s$ в (7.27). Тогда

$$P(X_s \in B) = \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) \int\limits_{B} P(s_0, x, s, dz) = \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) P(s_0, x, s, B). \tag{7.29}$$

В частности, при $s = s_0$ имеем $P(X_{s_0} \in B) = Q_{s_0}(B)$ в силу свойства 3) переходной функции.

Докажем, что выполнено (7.15). Свойство 2) переходной функции влечет, что $P(s, X_s, t, B)$ является $\sigma\{X_s\}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой (и ограниченной в силу 1)) случайной величиной при каждых $s, t \in T_{s_0}$ $(s \leqslant t)$, $B \in \mathcal{B}_t$. Поэтому для $A \in \sigma\{X_s\}$ достаточно убедиться, что

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{X_t \in B\}}\mathbb{1}_A = \mathsf{E}P(s, X_s, t, B)\mathbb{1}_A. \tag{7.30}$$

Любое $A \in \sigma\{X_s\}$ имеет вид $A = \{X_s \in D\}$ для некоторого $D \in \mathcal{B}_s$. Пользуясь (7.27), находим

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{X_t \in B\}}\mathbb{1}_A = P(X_s \in D,\, X_t \in B) = \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) \int\limits_{D} P(s_0, x, s, dz) P(s, z, t, B). \tag{7.31}$$

Принимая во внимание (7.30), а также теорему Фубини, получим

$$\mathsf{E}P(s, X_s, t, B)\mathbb{1}_{\{X_s \in D\}} = \int\limits_{\mathcal{X}_s} P(s, z, t, B)\mathbb{1}_D(z) Q_s(dz) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{X}_s} P(s, z, t, B)\mathbb{1}_D(z) \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) P(s_0, x, s, dz) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} Q_{s_0}(dx) \int\limits_{D} P(s_0, x, s, dz) P(s, z, t, B). \tag{7.32}$$

Из (7.31) и (7.32) следует (7.15).

Проверим марковость процесса $(X_t,\, t \in T_{s_0})$. В силу (7.12) достаточно показать, что для любых $n \geqslant 2$ и $t_1 < \ldots < t_n$ (точки из T_{s_0}), $B_n \in \mathcal{B}_{t_n}$

$$P(X_{t_n} \in B_n | X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} \in B_n | X_{t_{n-1}}).$$

Для этого требуется доказать, что для $A \in \sigma\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}\}$

$$\mathbf{E1}_{\{X_{t_n} \in B_n\}}\mathbb{1}_A = \mathsf{E}P(X_{t_n} \in B_n | X_{t_{n-1}})\mathbb{1}_A. \tag{7.33}$$

Пользуясь леммой 7.2, и учитывая (7.6), можно ограничиться рассмотрением функций вида $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{B_1} \cdots \mathbb{1}_{B_n}$, где $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда левая часть формулы (7.33) есть $P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in B_{n-1}, X_{t_n} \in B_n)$, и она запишется по формуле (7.27). В силу доказанной формулы (7.15) правую часть (7.33) можно записать, как $\mathsf{E}P(t_{n-1}, X_{t_{n-1}}, t_n, B_n)\mathbb{1}_A$. Заметим, что если $g_n : \mathcal{X}_{t_n} \to \mathbb{R}$ является ограниченной $\mathcal{B}_{t_n}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой функцией, то, с помощью предельного перехода от линейных комбинаций индикаторов, получим аналог формулы (7.27), выражающий

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{X_{t_1} \in B_1\}} \cdots \mathbb{1}_{\{X_{t_{n-1}} \in B_{n-1}\}} g(X_{t_n}),$$

где в правой части вместо $\mathbb{1}_{B_n}$ будет фигурировать $g(z_n)$. Остается воспользоваться этим аналогом, взяв $n-1$ вместо n, и выбрав

$$g_{n-1}(z_{n-1}) = P(t_{n-1}, z_{n-1}, t_n, B_n)\mathbb{1}_{B_{n-1}}(z_{n-1}). \ \square$$

Следствие Д7.2. *По намеченному пути легко построить марковский процесс не только на $T_{s_0} = T \cap [s_0, \infty)$, а на любом множестве $T \subset \mathbb{R}$, если располагать семейством мер Q_s на $(\mathcal{X}_s, \mathcal{B}_s)$, $s \in T$, связанных друг с другом соотношением (7.25) (где интегрирование ведется по $\mathcal{X}_s$).*

Введем **понятие марковского семейства**. Пусть, по-прежнему, $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ – польские пространства, $T \subset \mathbb{R}$ и $P(s,x,t,B)$ – переходная функция. Возьмем произвольное $s \in T$ и в качестве начального распределения выберем меру $Q_s(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, где $x \in \mathcal{X}_s$. По теореме Д7.1 на некотором вероятностном пространстве существует марковский процесс $X^{s,x} = \{X_t^{s,x},\ t \in T_s := [s,\infty) \cap T\}$, имеющий заданную переходную функцию и такой, что $X_s^{s,x} = x$ п.н. Вспоминая доказательство теоремы Д7.1, основанное на теореме Колмогорова (теорема 1.7), мы видим, что процесс $X^{s,x}$ был непосредственно задан (см. (1.8)) на пространстве $(\mathcal{X}_{T_s}, \mathcal{B}_{T_s})$, снабженном вероятностью $Q_{s,x} = \mathcal{L}(X^{s,x})$. **Переопределим процесс $X^{s,x}$ на $\Omega = \mathcal{X}_T$ формулой**

$$Y_t^{s,x}(\omega) := X_t^{s,x}(\pi_{T,T_s}\omega),\ t \in T_s,\ \omega \in \mathcal{X}_T, \tag{7.34}$$

где π_{T,T_s} обозначает отображение сужения функции с множества T на множество T_s (см. с. 8). Введем σ-алгебру $\mathcal{F}_{\geqslant s} := \pi_{T,T_s}^{-1}\mathcal{B}_{T_s}$ и зададим на ней меру $P_{s,x} = Q_{s,x}\pi_{T,T_s}^{-1}$.

Упр. 7.3. Объясните, почему $Y_t^{s,x}$, $t \in T_s$ – случайный процесс на $(\Omega, \mathcal{F}_{\geqslant s}, P_{s,x})$.

Теорема Д7.4. *Для каждого $s \in T$ и любого $x \in \mathcal{X}_s$ процесс $Y^{s,x} = \{Y_t^{s,x}(\omega),$ $t \in T_s,\ \omega \in \Omega\}$ является марковским на $(\Omega, \mathcal{F}_{\geqslant s}, P_{s,x})$ с переходной функцией $P(s,x,t,B)$. Кроме того, $Y_s^{s,x} = x$ п.н. по мере $P_{s,x}$.*

□ Равенство $Y_s^{s,x} = x$ очевидно, поскольку $Q_s = \delta_x$. Проверим, что для любых $u \leqslant t$ (точки из T), $B \in \mathcal{B}_t$

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B | Y_u^{s,x}) = P(u, Y_u^{s,x}, t, B) \quad P_{s,x} - \text{п.н.} \tag{7.35}$$

Достаточно убедиться, что для любого $D \in \mathcal{B}_u$

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B, Y_u^{s,x} \in D) = \int_{\{Y_u^{s,x} \in D\}} P(u, Y_u^{s,x}, t, B) dP_{s,x}.$$

Пользуясь формулами (7.34), (2.10), а также марковостью процесса $X^{s,x}$ на пространстве $(\mathcal{X}_{T_s}, \mathcal{B}_{T_s}, Q_{s,x})$, имеем

$$\int_{\{Y_u^{s,x} \in D\}} P(u, Y_u^{s,x}, t, B) dP_{s,x} = \int_{\{X_u^{s,x} \in D\}} P(u, X_u^{s,x}, t, B) dQ_{s,x} =$$
$$= Q_{s,x}(X_t^{s,x} \in B, X_u^{s,x} \in D) = P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B, Y_u^{s,x} \in D).$$

Марковость процесса $Y^{s,x}$ в смысле определения (7.12) проверяется совершенно аналогично. Предплагается проделать это в качестве упражнения. □

Теперь заметим, что **сложное обозначение** (7.34) **для процесса $Y^{s,x}$ было введено лишь для удобства применения формулы** (2.10) при переходе к интегрированию по другому пространству. **Очевидно**,

$$Y_t^{s,x}(\omega) = \omega(t) \quad \text{для } t \in T_s,\ \omega \in \Omega.$$

Иначе говоря, у нас имеется **один канонически заданный процесс $Y(t,\omega) = \omega(t)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega = \mathcal{X}_T$, который мы рассматриваем для разных s из T при $t \geqslant s$**

$(t \in T)$. **Этот процесс, как процесс на T_s и $(\Omega, \mathcal{F}_{\geqslant s}, P_{s,x})$ будет марковским с заданной переходной функцией, причем в момент s он начинается из точки x $P_{s,x}$-п.н.** $(x \in \mathcal{X}_s)$. Заметим, что обозначение $\mathcal{F}_{\geqslant s}$ полностью согласуется с использованным ранее на с. ??, поскольку σ-алгебра $\mathcal{F}_{\geqslant s}$ порождается семейством координатных отображений $\pi_{T,t}$ пространства $\mathcal{X}_T$ при $t \in T_s$. Другими словами, $\mathcal{F}_{\geqslant s} = \sigma\{Y_t,\, t \geqslant s,\, t \in T_s\}$. Таким образом полученные марковские процессы $Y^{s,x}$ назовем *марковским семейством* и обозначим его $(Y_t, P_{s,x})$.

Поскольку $\mathcal{F}_{\geqslant s} \subset \mathcal{B}_T$ для каждого $s \in T$, то меру $P_{s,x}$ можем продолжить на $\mathcal{F} = \mathcal{B}_T$ нулем для тех множеств из $\mathcal{B}_T$, которые не входят в $\mathcal{F}_{\geqslant s}$. Итак, **появляется возможность на одном и том же $(\Omega, \mathcal{F})$, задавая разные меры $P_{s,x}$ для $s \in T$, $x \in \mathcal{X}_s$, "выпускать" марковские процессы в момент s из точки x** (с $P_{s,x}$-вероятностью 1), **причем у всех процессов этого семейства $\{Y_t^{s,x},\, t \in T_s\}$** будет одна и та же заданная переходная функция. Пользуясь (7.35) при $u = s$, **легко прояснить смысл переходной функции для марковского семейства**:

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B) = P(s,x,t,B) \quad P_{s,x} - \text{п.н., где } \; s,t \in T \; (s \leqslant t),\; x \in \mathcal{X}_s,\; B \in \mathcal{B}_t.$$

Мы учли, что $P(\xi \in B|\eta) = P(\xi \in B)$ п.н., если $\eta = c$ п.н., где $c = const$.

Заметим, что если T – дискретное подмножество $\mathbb{R}$, то вместо теоремы Колмогорова при доказательстве теоремы Д7.1 мы могли использовать теорему Тулчи Д1.2, не налагая ограничений на фазовые пространства $\mathcal{X}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Однако, если мы хотим и в этом случае выпускать марковские процессы из произвольных точек, то должны потребовать, чтобы одноточечные множества входили в $\mathcal{B}_s$ при каждом $s \in T$.

Интересно отметить, что **к одним и тем же к.-м.р. марковского процесса могут приводить разные переходные функции**, как показывает

Пример Д7.5. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $T = [0, \infty)$. Возьмем начальное распределение $Q = \delta_0$ (мера Дирака, сосредоточенная в точке 0). Для $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ определим функции

$$P(x,t,B) = \mathbb{1}_B(x), \quad \widetilde{P}(x,t,B) = \mathbb{1}_B(x + \operatorname{sign} x),$$

где $\operatorname{sign} x = -1$ для $x < 0$, $\operatorname{sign} 0 = 0$, $\operatorname{sign} x = 1$ для $x > 0$.

□ Легко видеть, что P и $\widetilde{P}$ обладают свойствами 1') – 4'), приведенными на с. ??, и, следовательно, являются переходными функциями. Пользуясь формулой (7.24), получаем, что P и $\widetilde{P}$ приводят к к.-м.р. процесса, тождественно равного нулю. □

Прежде чем обсуждать дальнейшие обобщения марковского свойства мы **предлагаем следующие упражнения, чтобы освоить исходные понятия, рассмотренные в лекции 7**.

Упр. 7.6. Докажите, что определение (7.1) равносильно тому, что

$$P(A|\mathcal{F}_{\leqslant t}) = P(A|X_t) \text{ п.н.}$$

для любого $A \in \mathcal{F}_{\geqslant t}$ при каждом $t \in T$.

На с. ?? для с.в. ξ, заданной на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, и имеющей $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, мы напомнили, как определяется у.м.о. $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – какая-либо σ-алгебра $(\mathcal{A} \subset \mathcal{F})$. Полезно представлять, что в определенном смысле у.м.о. является **обобщенной проекцией**, как показывает

Упр. 7.7. Пусть гильбертово пространство $H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра. Для $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обозначим $Pr_H\xi$ ортогональную проекцию ξ на H. Докажите, что $Pr_H\xi = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ п.н.

Упр. 7.8. (продолжение упр. 7.7). Pr_H – ограниченный линейный оператор на $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Поскольку $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ плотно в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то Pr_H единственным образом по непрерывности продолжается на $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Докажите, что $\mathsf{E}(\cdot|\mathcal{A})$ совпадает (п.н.) с этим продолжением.

Упр. 7.9. Пусть $(X_t,\, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$ – марковский процесс. Объясните, почему $(X_t,\, t \in U)$, где $U \subset T$, также марковский процесс. В частности, если $(X_t,\, t \geqslant 0)$ – марковский процесс, то для любого $\Delta > 0$ процесс $(X_{k\Delta},\, k = 0, 1, \dots)$ будет марковским. Верно ли обратное утверждение?

Упр. 7.10. Пусть $(X_t,\, t \geqslant 0)$ – марковский процесс со значениями (при каждом t) в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Пусть $(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ – измеримое пространство и $h_t : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $h_t \in \mathcal{B}|\mathcal{E}$, $t \geqslant 0$. Докажите, что если h_t для каждого $t \geqslant 0$ – взаимно-однозначное отображение, то $(h_t(X_t),\, t \geqslant 0)$ есть марковский процесс.

Упр. 7.11. Приведите пример, показывающий, что если в условиях предыдущего упражнения отказаться от условия взаимной однозначности h_t, то утверждение может не выполняться.

Упр. 7.12. Пусть $(X_t,\, t \geqslant 0)$ – марковский процесс со значениями в $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$. Положим $Y_t = [X_t]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Можно ли утверждать, что Y_t – марковский процесс?

Упр. 7.13. (сравните с упр. 7.10, 7.11). Пусть $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$, $t \geqslant 0$ есть m-мерное броуновское движение. Положим $X_m(t) = \left(\sum_{k=1}^m W_k^2(t)\right)^{1/2}$, этот процесс называется *процессом Бесселя*. Будет ли процесс $(X_m(t),\, t \geqslant 0)$ марковским? В частности, при $m = 1$ имеем $X_1(t) = |W_1(t)|$.

Упр. 7.14. Пусть $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ и $\{Y_t,\, t \geqslant 0\}$ – действительные марковские процессы. Будут ли процессы $\{X_t + Y_t,\, t \geqslant 0\}$ и $\{X_t Y_t,\, t \geqslant 0\}$ марковскими? Что можно сказать о частном случае, когда $Y_t = c(t)$, где $c(t)$ – детерминированная функция?

Упр. 7.15. Пусть $\{X_k,\, k = 0, 1, \dots\}$ – действительный марковский процесс. Положим $X_t = (t - k)X_k + (k + 1 - t)X_{k+1}$ для $t \in [k, k+1)$, $k = 0, 1, \dots$, т.е. рассмотрим на $[0, \infty)$ непрерывную ломаную с узлами (k, X_k). Будет ли процесс $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ марковским? Будет ли марковским процесс $Y_t = X_{[t]}$, $t \geqslant 0$, где $[\cdot]$ – целая часть числа?

Упр. 7.16. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р. величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностью 1/2. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $X_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$. Докажите, что $\{X_n,\, n \geqslant 0\}$ не является марковским процессом.

Упр. 7.17. Пусть $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые величины, причем $\xi_1, \xi_2, \dots$ равномерно распределены на $[0, 1]$, а η – действительная случайная величина с ф.р. $F_\eta(x)$. Положим $S_n = 1$, если $\xi_n \leqslant \eta$, и $S_n = -1$, если $\xi_n > \eta$ $(n = 1, 2, \dots)$. Будет ли $\{S_n,\, n \geqslant 1\}$ однородным марковским процессом?

Упр. 7.18. Докажите, что действительный гауссовский процесс $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ будет марковским, если в условиях леммы 7.5 использовать лишь функцию $G(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$.

Упр. 7.19. Докажите, что **действительный гауссовский процесс $\{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ будет марковским тогда и только тогда, когда для любых $t_1 < t_2 < t_3$ $(t_1, t_2, t_3 \in T)$ справедливо равенство**

$$r(t_1, t_3) r(t_2, t_2) = r(t_1, t_2) r(t_2, t_3), \tag{7.36}$$

где $r(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t)$, $s, t \in T$.

Упр. 7.20. Докажите, что процесс Орнштейна – Уленбека $X_t = e^{-t}W(e^{2t})$, $t \in \mathbb{R}$, где $W(\cdot)$ – винеровский процесс, является однородным марковским процессом.

Упр. 7.21. Пусть $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$ и пусть X_0 не зависит от пуассоновского процесса $\{N_t,\, t \geqslant 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$. Пусть процесс $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ меняет свое значение на значение противоположного знака в точках скачков пуассоновского процесса (это так называемая *телеграфная волна*). Будет ли процесс $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ марковским? Найдите его ковариационную функцию.

Упр. 7.22. Для $x > 0$ пусть $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) = x\}$, где $W(\cdot)$ – винеровский процесс. Докажите, что $\{\tau_x,\, x > 0\}$ – процесс с независимыми приращениями, а следовательно, марковский по теореме 7.7.

Упр. 7.23. Пусть $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ – марковский процесс. Для $s > 0$ определим процесс $Y = \{X_{s-t},\, t \in [0,s]\}$. Будет ли Y марковским процессом? Обязан ли Y быть однородным процессом, если таковым является X?

Упр. 7.24. Докажите, что броуновский мост – это неоднородный марковский процесс.

Упр. 7.25. Пусть X – случайный процесс на $[0,\infty)$, и $Y = \{Y_t = (X_t, t),\, t \geqslant 0\}$. Докажите, что X и Y могут быть марковскими только одновременно. Докажите, что если Y – марковский процесс, то обязательно однородный. Как связаны переходные функции X и Y?

Упр. 7.26. Пусть $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ – однородный марковский процесс со значениями в некотором польском пространстве $\mathcal{X}$. Докажите, что существуют измеримые функции $h_s : \mathcal{X} \times [0,1] \to \mathcal{X}$, $s \geqslant 0$ (т.е. $h_s \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}([0,1])|\mathcal{B}(\mathcal{X})$, $s \geqslant 0$) и равномерно распределенные величины $\theta_{t,s}$ независимые от $\{X_u,\, 0 \leqslant u \leqslant t\}$ при $t, s \geqslant 0$ такие, что $X_{t+s} = h_s(X_t, \theta_{t,s})$ п.н. для всех $t, s \geqslant 0$.

Упр. 7.27. Пусть однородный марковский процесс принимает значения в $\mathbb{R}^m$ и $P(x,t,B) = P(x+y, t, B+y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^m$, $t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Докажите, что тогда процесс имеет независимые приращения.

Обратимся к обобщениям марковского свойства. В монографии [**?**] дается определение марковского процесса, время жизни которого случайно, т.е. траектории могут обрываться в случайный момент времени (наглядно можно представить частицу, которая сгорела). В учебнике [**?**] детально изучается так называемое "*марковское семейство*" (см. также с. ??), т.е. рассматривается семейство процессов, допускающих выпускание из разных точек фазового пространства, но дальнейший механизм перехода которых из состояния в состояние одинаков. Можно определить марковость процесса $X = \{X_t,\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$, **используя некоторый поток σ-алгебр** $\mathcal{F}_t$, $t \in T$ ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s \leqslant t$, $s, t \in T$). А именно, $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – марковский процесс (со значениями при каждом t в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$), если *процесс X согласован с семейством* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (т.е. $X_t \in \mathcal{F}_t|\mathcal{B}$ при любом $t \in T$) и для каждых $s, t \in T$, $s \leqslant t$ и $B \in \mathcal{B}$

$$P(X_t \in B|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in B|X_s) \ \text{ п.н.} \tag{7.37}$$

Легко показать, что тогда и для естественной фильтрации, т.е. потока $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leqslant t} = \sigma\{X_s,\ s \in T\cap(-$
$t \in T$ мы получаем введенное ранее определение марковского процесса.

Более сложным образом свойство марковости вводится для случайных полей. Объясним лишь суть подхода, не останавливаясь на деталях (см. [**?**, гл. 2]).

Пусть в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ имеются σ-алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ Говорят, что $\mathcal{E}$ *расщепляет* $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, если

$$P(A_1 A_2|\mathcal{E}) = P(A_1|\mathcal{E})P(A_2|\mathcal{E}) \text{ для } A_k \in \mathcal{A}_k,\ k = 1, 2. \tag{7.38}$$

Таким образом, определение (7.1) означает, что $\sigma\{X_t\}$ расщепляет $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant t}$ для всех $t \in T$.

Упр. 7.28. Докажите, что (7.38) равносильно тому, что

$$\mathsf{E}(F_1 F_2|\mathcal{E}) = \mathsf{E}(F_1|\mathcal{E})\mathsf{E}(F_2|\mathcal{E})$$

для $F_k \in \mathcal{M}_k$, где $\mathcal{M}_k$ – полная система в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{A}_k, P)$, $k = 1, 2$.

Упр. 7.29. Если $\mathcal{E}$ расщепляет $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то $\mathcal{E}$ расщепляет и $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{A} \vee \mathcal{E}$ обозначает наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$.

Упр. 7.30. (ср. с упр. 7.6). Условие (7.38) равносильно тому, что

$$P(A|\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{E}) = P(A|\mathcal{E}) \text{ для } A \in \mathcal{A}_2.$$

Упр. 7.31. Пусть σ-алгебры $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{E}_\alpha$ расщепляет $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ $(\alpha \in I)$. Тогда $\cap_{\alpha \in I} \mathcal{E}_\alpha$ расщепляет $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Упр. 7.32. Если выполнено (7.38), то $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{E}$. В частности, в (7.1) фигурирует минимальная расщепляющая алгебра, поскольку $\sigma\{X_t\} \subset \mathcal{F}_{\leqslant t} \cap \mathcal{F}_{\geqslant t}$.

Заметим, что независимость σ-алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ равносильна тому, что их расщепляет тривиальная σ-алгебра $\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Если $(X_t,\, t \in T)$ – случайная функция, то она порождает семейство σ-алгебр $\mathcal{A}(U) = \sigma\{X_t,\, t \in U\}$, $U \subset T$. В отличие от ситуации, когда $T \subset R$, у нас, вообще говоря, нет естественно возникающего "прошлого" и "будущего". Поэтому имеется ряд возможностей определить, какие σ-алгебры $\mathcal{A}(U_1)$ и $\mathcal{A}(U_2)$ для $U_1, U_2 \subset T$ и какой σ-алгеброй должны расщепляться. Сложность по сравнению (7.1) состоит еще и в том, что, например, для обобщенной случайной функции ξ (см., например, [**?**]), действующей на $C_0^\infty(T)$ (пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций), где область $T \subset \mathbb{R}^n$, оказывается удобным оперировать со случайными величинами (ξ, ϕ) для пробных функций ϕ, имеющих носитель $\mathrm{supp}\phi \subset U$ (область $U \subset T$), а не фиксировать "точечное условие", как в (7.1). Точнее говоря, пусть имеется некоторая система Λ открытых множеств в локально-компактном метрическом пространстве T, и пусть для каждого $S \in \Lambda$ можно указать следующую тройку множеств: $S_1 = S$, Γ, $S_2 = T \setminus [S]$, где $[S] = S \cup \partial S$, а Γ – замкнутое множество, содержащее ∂S (границу S). Некоторое семейство σ-алгебр $\mathcal{A}(U)$, $U \subset T$ (таких, что $\mathcal{A}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{A}(U_1) \vee \mathcal{A}(U_2)$) называется *марковским по отношению к системе* Λ, если $\mathcal{A}(\Gamma^\varepsilon)$ расщепляет $\mathcal{A}(S_1)$ и $\mathcal{A}(S_2)$ сколь бы мало $\varepsilon > 0$ ни было (здесь Γ^ε есть ε-окрестность множества Γ). Для случайных полей, заданных на решетке $\mathbb{Z}^d$, понятие марковости проще (см. приложение 1).

Интересно также отметить, что если исходная случайная функция не обладает марковским свойством, то **может оказаться** (см. упр. 7.25)**, что рассмотрение нового фазового пространства, расширяющего исходное, и новой случайной функции, имеющей прежнюю в качестве компоненты, позволяет получить марковость новой функции.** Так, в [**?**, с. 91] рассмотрен пример, когда случайная функция, являющаяся решением некоторого линейного дифференциального уравнения с "белым шумом" будет немарковской, а векторная случайная функция, имеющая компонентами исходную и ее производные до определенного порядка будет марковской.

Лекция 8. Цепи Маркова.

Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Эквивалентное определение пуассоновского процесса как цепи Маркова. Явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера.

Пусть фазовое пространство $\mathcal{X}$ изучаемого марковского процесса **дискретно**, т.е. состоит из конечного или счетного числа точек, которые занумерованы. Точку $x_i \in \mathcal{X}$ отождествим с ее номером i, при этом будем считать, что i пробегает либо конечное множество $\{0, 1, \dots, r\}$, либо счетное $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\mathcal{B}$ состоит из всех подмножеств $\mathcal{X}$. Пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ является польским, если ввести метрику, положив $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$, $x, y \in \mathcal{X}$. Заметим также, что любая функция $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ является $\mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой. Марковский процесс с дискретным пространством состояний называется *цепью Маркова.*

Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{A}$, порожденную разбиением Ω на множества A_j, $j \in J$, где J – конечное или счетное множество ($\cup_{j \in J} A_j = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$). Для случайной величины ξ, имеющей $\mathsf{E}|\xi| < \infty$

$$\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}) = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{E}\xi \mathbb{I}_{A_j}}{P(A_j)}, & \text{если } P(A_j) \neq 0 \\ 0, & \text{если } P(A_j) = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

на A_j (любой вариант $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A})$ п.н. совпадает с указанным).

Для марковской цепи $X = (X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R})$ и любого набора точек $t_1, \dots, t_n \in T$ σ-алгебра $\sigma\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$ порождается разбиением Ω на события вида $\{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\}$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}$. Поэтому в силу (7.12) и (8.1) процесс $X = (X_t,\ t \in T)$ **является цепью Маркова тогда и только тогда, когда для любого** $m \in \mathbb{N}$, **всех** $s_1 < \ldots < s_m < s \leqslant t$ (точки из T) **и любых** $i, j, i_1, \dots, i_m \in \mathcal{X}$ **справедливо равенство**

$$P(X_t = j | X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m, X_s = i) = P(X_t = j | X_s = i), \tag{8.2}$$

если $P(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m, X_s = i) \neq 0$. Здесь $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ для $P(B) \neq 0$ (что полностью согласуется с использовавшимися ранее формулами вида $P(A|\eta = x) = \varphi(x)$, где $P(A|\eta) = \varphi(\eta)$).

Пусть $\mathcal{X}_s = \{i \in \mathcal{X} : P(X_s = i) \neq 0\}$, $s \in \mathcal{X}$. Для $s \leqslant t$ $(s, t \in T)$, $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}$ введем *переходные вероятности*

$$p_{ij}(s, t) = P(X_t = j | X_s = i) \tag{8.3}$$

Из определения (8.3) легко получить, что функции $p_{ij}(s, t)$ должны удовлетворять четырем условиям:

1) $p_{ij}(s, t) \geqslant 0$ для любых $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$, и $s \leqslant t$, $s, t \in T$,
2) $\sum\limits_{j \in \mathcal{X}_t} p_{ij}(s, t) = 1$ для любых $i \in \mathcal{X}_s$ и $s \leqslant t$, $s, t \in T$,
3) $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$ для любых $i, j \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$ и $s \in T$, где δ_{ij} — символ Кронекера,
4) для любых $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$ и всех $s \leqslant u \leqslant t$ $(s, u, t \in T)$

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in \mathcal{X}_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t). \tag{8.4}$$

Соотношение (8.4) называют *уравнением Маркова.*

Условия 1)–3) тривиальны, проверим 4). Учитывая (8.2) и (8.3), имеем

$$P(X_t = j \mid X_s = i) = \frac{P(X_t = j,\ X_s = i)}{P(X_s = i)} = \sum_k \frac{P(X_t = j,\ X_u = k,\ X_s = i)}{P(X_s = i)} =$$

$$= \sum_{k:\ \ P(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k,\ X_s = i) \frac{P(X_u = k,\ X_s = i)}{P(X_s = i)} =$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{X}_u} P(X_t = j \mid X_u = k) P(X_u = k \mid X_s = i) = \sum_{k \in \mathcal{X}_u} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t). \quad (8.5)$$

Соотношение (8.4) – это дискретный вариант уравнений Колмогорова – Чепмена. Можно было сразу сослаться на рассуждения о формуле (7.16), проведенные на с. ??, заметив, что "P_{X_s}-п.н." означает "для $i \in \mathcal{X}_s$". Уравнение Маркова имеет очень наглядный смысл: перейти из состояния i в состояние j за время от s до t можно лишь, оказавшись в промежуточный момент u в одном из состояний $k \in \mathcal{X}_u$, и совершив сперва переход из i в k, а затем из k в j.

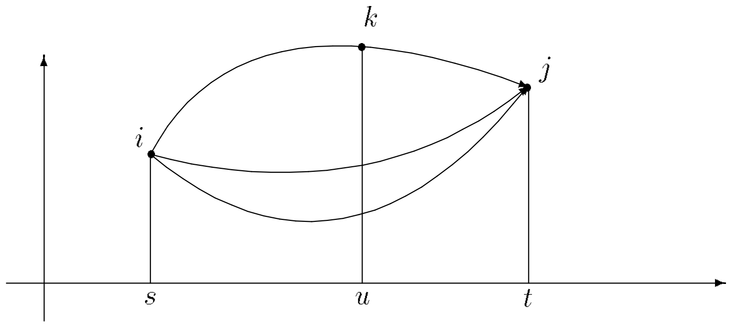

Рис. 8.1

Теорема 8.1. *Пусть $0 \in T \subset [0,\infty)$, а множества $\mathcal{X}_s \subset \mathcal{X}$, $s \in T$, где $\mathcal{X}$ – конечно или счетно. Пусть задан набор чисел $p_i(0)$, $i \in \mathcal{X}_0$, такой что $p_i(0) > 0$, $\sum_{i \in \mathcal{X}_0} p_i(0) = 1$. Пусть заданы функции $p_{ij}(s,t)$ для $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$, $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$, для которых выполнены приведенные выше условия 1)–4). Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существует марковская цепь $X = \{X_t,\ t \in T\}$ с пространством состояний $\mathcal{X}_t$ при каждом $t \in T$ (т.е. $X_t(\omega) \in \mathcal{X}_t$ при каждом t для всех $\omega \in \Omega$), такая, что $p_i(0) = P(X_0 = i)$ и $p_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i)$ при всех $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$, $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$.*

□ Если бы процесс X с заданными характеристиками существовал, то мы должны были бы иметь при $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, и любых $B_k \subset \mathcal{X}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$

$$P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \sum_i p_i(0) \sum_{j_1 \in B_1} p_{ij_1}(0,t_1) \ldots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n). \quad (8.6)$$

Поэтому остается лишь задать меры $P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n)$ с помощью правой части формулы (8.6) (см. замечание 2.8) и проверить условие 3° со с. ??. Тогда процесс $(X_t,\ t \in T)$, построенный по данным к.-м.р. будет искомым. Мы оставляем доказательство в качестве упражнения, поскольку теорема Д7.1 содержит более общий результат. □

Отметим, что функция

$$P(s,i,t,B) = \sum_{j\in B} p_{ij}(s,t), \tag{8.7}$$

заданная для $s \leqslant t$ $(s,t \in T_0)$, $i \in \mathcal{X}_s$, $B \subset \mathcal{X}$ является переходной функцией в смысле определения приведенного на с. ??. Подчеркнем, что **в дискретном случае переходная функция полностью определяется (условными) вероятностями переходов из одноточечного множества в одноточечное множество**.

Таким образом, **условия теоремы 8.1 необходимы и достаточны.**

Замечание 8.2. Отправляясь от функций $p_{ij}(s,t)$, заданных для $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$, $i \in \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}_t$, можно оперировать с их продолжениями, определенными для всех $s \leqslant t$ $(s,t \in T)$ и $i,j \in \mathcal{X}$. Достаточно положить $p_{ij}(s,t) = 0$ для $i \in \mathcal{X}_s$, $j \notin \mathcal{X}_t$ и $p_{ij}(s,t) = p_{i_0j}(s,t)$ для $i \notin \mathcal{X}_s$, $j \in \mathcal{X}$, где $i_0 = i_0(s) \in \mathcal{X}_s$ выбрано произвольно $(\mathcal{X}_s \neq \emptyset)$. При этом легко убедиться, что свойства 1) – 4) переходных вероятностей будут верны и для их продолжений (**теперь можно считать $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$ для $t \in T$**).

Важнейшим представителем марковских цепей является **пуассоновский процесс**.

Теорема 8.3. *Процесс $N = \{N_t,\ t \geqslant 0\}$ является пуассоновским тогда и только тогда, когда N — цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{X} = \{0,1,2,\dots\}$, такая что $p_i(0) = \delta_{i0}$ и для $0 \leqslant s < t$, $i,j \in \mathcal{X}$*

$$p_{ij}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(m((s,t]))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-m((s,t])}, & j \geqslant i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \tag{8.8}$$

здесь m – σ-конечная мера на $\mathcal{B}([0,\infty))$. Считаем $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$ для $s \geqslant 0$ и $i,j \in \mathcal{X}$.

□ Пусть N — стандартный пуассоновский процесс, т.е. $N_0 = 0$ п.н., процесс имеет независимые приращения и $N_t - N_s \sim \pi_{m((s,t])}$ при $t > s \geqslant 0$, т. е. приращение распределено по закону Пуассона с параметром $m((s,t])$. Такой процесс существует по следствию 2.14. В силу теоремы 7.7 N — марковский процесс, при этом п.н. $N_t = N_t - N_0 \sim \pi_{m((0,t])}$, $t > 0$; $\mathcal{X} = \{0,1,\dots\}$. Очевидно также, что $p_i(0) = P(N_0 = i) = \delta_{i0}$, $i \in \mathcal{X}$.

Для $0 \leqslant s < t$ имеем

$$p_{ij}(s,t) = P(N_t = j \mid N_s = i) = \frac{P(N_t - N_s = j-i,\ N_s = i)}{P(N_s = i)} = P(N_t - N_s = j-i),$$

что означает справедливость (8.8). При $s \geqslant 0$ для всех $i,j \in \mathcal{X}$ получаем $p_{ij}(s,s) = P(N_s = j \mid N_s = i) = \delta_{ij}$.

Обратно. Пользуясь теоремой 8.1, строим процесс $\{N_t,\ t \geqslant 0\}$ по переходным вероятностям (8.8) и начальному распределению, сосредоточенному в нуле. Очевидно, $N_0 = 0$ п.н., т. к. $p_i(0) = \delta_{i0}$, $i \in \mathcal{X}$. Для $s < t$ и $k \geqslant 0$ имеем, пользуясь (8.6) и (8.8),

$$P(N_t - N_s = k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(N_t - N_s = k,\ N_s = l) = \sum_{l=0}^{\infty} P(N_t = k+l,\ N_s = l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i p_i(0) p_{il}(0,s) p_{l,k+l}(s,t) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{0l}(0,s) p_{l,k+l}(s,t) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m((0,s]))^l}{l!} e^{-m((0,s])} \cdot \frac{(m((s,t]))^k}{k!} e^{-m((s,t])} = \frac{(m((s,t]))^k}{k!} e^{-m((s,t])}. \tag{8.9}$$

Нам дано, что при каждом $t \geqslant 0$ величины N_t принимают значения в $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots\}$. Из (8.9) вытекает, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(N_t - N_s = k) = 1$, поэтому $P(N_t - N_s = k) = 0$ для $k < 0$. Итак, $N_t - N_s \sim \pi_{m((s,t])}$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Для $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $0 \leqslant k_1, \dots, k_n$ получаем

$$\begin{aligned}
&P(N_{t_1} = k_1,\ N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) = \\
&\quad = P(N_{t_1} = k_1,\ N_{t_2} = k_1 + k_2, \dots, N_{t_n} = k_1 + \ldots + k_n) = \\
&\quad = \sum_i p_i(0) p_{ik_1}(0, t_1) p_{k_1, k_1+k_2}(t_1, t_2) \ldots p_{k_1+\ldots+k_{n-1},\, k_1+\ldots+k_n}(t_{n-1}, t_n) = \\
&\quad = \frac{(m((0,t_1]))^{k_1}}{k_1!} e^{-m((0,t_1])} \frac{(m((t_1,t_2]))^{k_2}}{k_2!} e^{-m((t_1,t_2])} \ldots \frac{(m((t_{n-1},t_n]))^{k_n}}{k_n!} e^{-m((t_{n-1},t_n])} = \\
&\quad = \prod_{m=1}^{n} P(N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m).
\end{aligned} \tag{8.10}$$

При выводе (8.10) мы учли (8.6) и (8.9). Независимость приращений доказана. □

Пусть $m(\cdot)$ – σ-конечная мера на $\mathcal{B}([0,\infty))$ и $m([0,\infty)) = \infty$. Обозначим $M(t) = m([0,t))$, $t \geqslant 0$ и определим обобщенную обратную функцию

$$M^{-1}(t) = \inf\{u \geqslant 0 :\ M(u) \geqslant t\},\ t \in [0, \infty).$$

Теорема 8.4. *Пусть $\{N(t), t \geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс с ведущей мерой $m(\cdot)$. Тогда* ***неслучайной заменой времени он превращается в процесс*** *$\{\nu(t) = N(M^{-1}(t)), t \geqslant 0\}$,* ***являющийся стандартным пуассоновским процессом с интенсивностью*** *$\lambda = 1$. И обратно, по заданному стандартному пуассоновскому процессу $\{\nu(t), t \geqslant 0\}$ интенсивности $\lambda = 1$ и σ-конечной мере $m(\cdot)$ на $\mathcal{B}([0,\infty))$ строится пуассоновский процесс $N(t) = \nu(M(t))$, $t \geqslant 0$, имеющий ведущую меру $m(\cdot)$.*

□ Следует лишь заметить, что $m((s,t]) = M(t) - M(s)$ для $0 \leqslant s < t$ и $M(M^{-1}(t)) \equiv t$ при $t \geqslant 0$. □

Теперь покажем, как **стандартный пуассоновский процесс может быть построен по последовательности независимых экспоненциальных случайных величин**.

Теорема 8.5 (явная конструкция пуассоновского процесса). *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные экспоненциальные величины, т. е. имеющие плотность*

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{8.11}$$

Положим $\nu_0(\omega) = 0$, а для $t > 0$ пусть

$$\nu_t(\omega) = \max\Big\{k\colon \sum_{i \leqslant k} \xi_i(\omega) \leqslant t\Big\}, \tag{8.12}$$

считаем $\sum\limits_{\varnothing} = 0$, *т. е.* $\nu_t(\omega) = 0$, *если* $\xi_1(\omega) > t$. *Тогда* $\{\nu_t,\ t \geqslant 0\}$ — *стандартный пуассоновский процесс с интенсивностью* λ.

Теорема 8.5 описывает, как устроены траектории пуассоновского процесса, см. рис. 8.2.

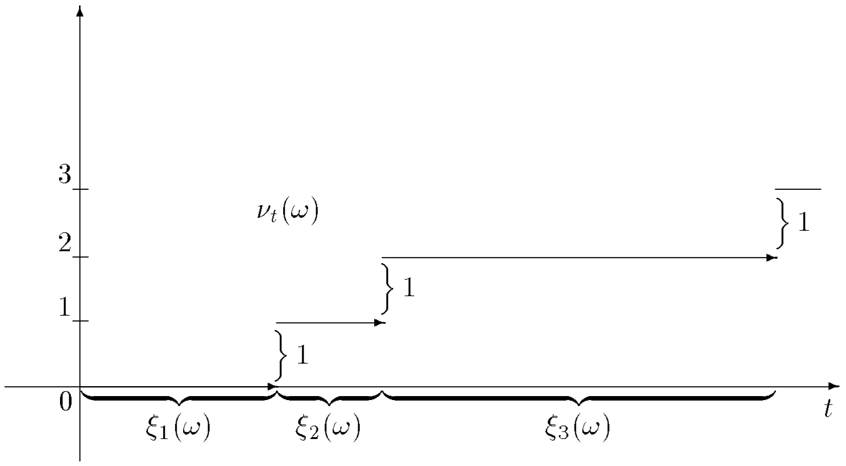

Рис. 8.2

□ По условию $\nu_0(\omega) = 0$. Пусть $t > 0$. Тогда

$$P(\nu_t = 0) = P(\xi_1 > t) = \int\limits_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x}.$$

Обозначим $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k \geqslant 1$. При $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$p_{S_k}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ \quad 0, & x < 0. \end{cases} \tag{8.13}$$

Равенство (8.13) элементарно выводится по индукции с использованием формулы свертки. Применив (8.13), находим для $k \geqslant 1$

$$P(\nu_t = k) = P(S_k \leqslant t,\ S_{k+1} > t) = P(S_k \leqslant t,\ S_k + \xi_{k+1} > t) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{u \leqslant t \\ u+v>t}} p_{S_k}(u) p_{\xi_{k+1}}(v)\, du\, dv = \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda u} du \int\limits_{t-u}^\infty \lambda e^{-\lambda v} dv =$$

$$= e^{-\lambda t} \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} du = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Покажем, что $\{\nu_t,\ t \geqslant 0\}$ **имеет независимые приращения и** $\nu_t - \nu_s \sim \pi_{\lambda(t-s)}$ **для** $0 \leqslant s < t$. Эти два утверждения последуют из формулы

$$P(\nu_{t_1} = k_1,\ \nu_{t_2} - \nu_{t_1} = k_2, \ldots, \nu_{t_n} - \nu_{t_{n-1}} = k_n) = \prod_{j=1}^n q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})) \tag{8.14}$$

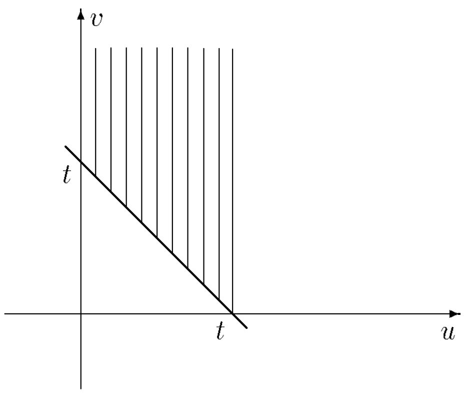

Рис. 8.3

для всех $n \geqslant 2$, $0 = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ и $k_1, k_2, \ldots, k_n \geqslant 0$, где

$$q_k(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, & \mu > 0,\ k = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \mu < 0,\ k = 0, 1, \ldots, \\ \delta_{k\mu}, & \mu = 0,\ k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Действительно, если доказать (8.14), то

$$P(\nu_{t_2} - \nu_{t_1} = k_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P(\nu_{t_1} = k_1,\ \nu_{t_2} - \nu_{t_1} = k_2) = \\ = q_{k_2}(\lambda(t_2 - t_1)) \sum_{k_1=0}^{\infty} q_{k_1}(\lambda t_1) = q_{k_2}(\lambda(t_2 - t_1)).$$

Итак, проверим (8.14). Обозначим A событие, фигурирующее в левой части формулы (8.14). Тогда $A = \{\nu_{t_1} = k_1,\ \nu_{t_2} = k_1 + k_2, \ldots, \nu_{t_n} = k_1 + \ldots + k_n\}$. Если $k_1 = \ldots k_n = 0$, то

$$P(A) = P(\xi_1 > t_n) = e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \ldots e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}$$

и (8.14) выполнено. **Дальнейшее доказательство ведется индукцией по** n. Пусть для некоторого $2 \leqslant m \leqslant n$ $k_1 = 0, \ldots, k_{m-1} = 0$, $k_m \geqslant 1$, $k_j \geqslant 0$, $m < j \leqslant n$. Тогда

$$A = \{t_{m-1} < \xi_1 \leqslant t_m,\ S_{k_m} \leqslant t_m,\ S_{k_m+1} > t_m, \ldots, S_{k_m+\ldots+k_n} \leqslant t_n,\ S_{k_m+\ldots+k_n+1} > t_n\}$$

и $P(A) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbb{1}_A \mid \xi_1))$. Пользуясь (7.13), имеем

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}(\mathbb{1}_A \mid \xi_1 = x) = \\ &\quad = \mathsf{E}\mathbb{1}\{t_{m-1} < x \leqslant t_m,\ x + \xi_2 + \ldots + \xi_{k_m} \leqslant t_m,\ x + \xi_2 + \ldots + \xi_{k_m+1} > t_m, \ldots, \\ &\qquad\quad x + \xi_2 + \ldots + \xi_{k_m+\ldots+k_n} \leqslant t_n,\ x + \xi_2 + \ldots + \xi_{k_m+\ldots+k_n+1} > t_n\} = \\ &\quad = \mathbb{1}\{t_{m-1} < x \leqslant t_m\} \times \\ &\quad \times P(S_{k_m-1} \leqslant t_m - x,\ S_{k_m} > t_m - x, \ldots, S_{k_m+\ldots+k_n-1} \leqslant t_n - x,\ S_{k_m+\ldots+k_n} > t_n - x). \end{aligned} \tag{8.15}$$

Мы учли, что последовательность $\xi_2, \xi_3, \ldots$ распределена так же, как $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (а следовательно, $\{\tilde{S}_k\}$, где $\tilde{S}_k = \xi_2 + \ldots + \xi_{k+1}$, распределена так же, как $\{S_k\}$). Далее, применяя индукцию, получаем

$$\mathsf{E}(\mathbb{1}_A \mid \xi_1 = x) = \mathbb{1}_{\{t_{m-1} < x \leqslant t_m\}} \times$$

$$\times P(\nu_{t_m - x} = k_m - 1,\ \nu_{t_{m+1}-x} - \nu_{t_m - x} = k_{m+1}, \ldots, \nu_{t_n - x} - \nu_{t_{m-1}-x} = k_n) =$$
$$= \mathbb{1}_{\{t_{m-1} < x \leqslant t_m\}} q_{k_m - 1}(\lambda(t_m - x)) \prod_{j=m+1}^{n} q_{k_j}(\lambda[(t_j - x) - (t_{j-1} - x)]). \quad (8.16)$$

В формуле (8.16) $\nu_{t_m - x}$ не определено при $x > t_m$. Однако для таких x правая часть (8.15) равна нулю. Поэтому мы считаем, что наличие $\mathbb{1}_{\{t_{m-1} < x \leqslant t_m\}}$ обеспечивает рассмотрение только $t_{m-1} < x \leqslant t_m$. Таким образом,

$$P(A) = \mathsf{E}\mathbb{1}_{\{t_{m-1} < \xi_1 \leqslant t_m\}} q_{k_m - 1}(\lambda(t_m - \xi_1)) \prod_{j=m+1}^{n} q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})) =$$
$$= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda(t_m - x))^{k_m - 1}}{(k_m - 1)!} e^{-\lambda(t_m - x)} dx \prod_{j=m+1}^{n} q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})) =$$
$$= \frac{e^{-\lambda t_m}}{(k_m - 1)!} \lambda \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\lambda(t_m - x))^{k_m - 1} dx \prod_{j=m+1}^{n} q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})) =$$
$$= e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \ldots e^{-\lambda(t_m - t_{m-1})} \frac{(\lambda(t_m - t_{m-1}))^{k_m}}{k_m!} \prod_{j=m+1}^{n} q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})).$$

Итак, (8.14) установлено в случае $k_1 = \ldots = k_{m-1} = 0$, $k_m \geqslant 1$, $k_j \geqslant 0$, $m < j \leqslant n$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$. Пусть теперь $k_1 \geqslant 1$. Тогда аналогично вышеизложенному для $0 \leqslant x \leqslant t_1$ имеем

$$\begin{aligned}
&P(\mathbb{1}_A \mid S_{k_1} = x) = \\
&\quad = \mathsf{E}\mathbb{1}\{0 \leqslant x \leqslant t_1,\ x + \xi_{k_1+1} > t_1,\ x + \xi_{k_1+1} + \ldots + \xi_{k_1+k_2} \leqslant t_2, \\
&\qquad x + \xi_{k_1+1} + \ldots + \xi_{k_1+k_2+1} > t_2, \ldots, x + \xi_{k_1+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_n} \leqslant t_n, \\
&\qquad x + \xi_{k_1+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} > t_n\} = \\
&\quad = \mathsf{E}\mathbb{1}\{0 \leqslant x \leqslant t_1,\ \xi_1 > t_1 - x,\ S_{k_2} \leqslant t_2 - x, \\
&\qquad S_{k_2+1} > t_2 - x, \ldots, S_{k_2+\ldots+k_n} \leqslant t_n - x,\ S_{k_2+\ldots+k_1+1} > t_n - x\} = \\
&\quad = \mathbb{1}\{0 \leqslant x \leqslant t_1\} P(\nu_{t_1 - x} = 0,\ \nu_{t_2 - x} = k_2, \ldots, \nu_{t_n - x} = k_2 + \ldots + k_n) = \\
&\quad = \mathbb{1}\{0 \leqslant x \leqslant t_1\} P(\nu_{t_1 - x} = 0,\ \nu_{t_2 - x} - \nu_{t_1 - x} = k_2, \ldots, \nu_{t_n - x} - \nu_{t_{n-1} - x} = k_n) = \\
&\quad = \mathbb{1}\{0 \leqslant x \leqslant t_1\} e^{-\lambda(t_1 - x)} \prod_{j=2}^{n} q_{k_j}(\lambda(t_j - t_{j-1})). \qquad (8.17)
\end{aligned}$$

При получении (8.17) мы воспользовались уже рассмотренным случаем, когда $k_1 = 0$. Теперь заметим, что в силу (8.13)

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{0 \leqslant S_{k_1} \leqslant t_1\}} e^{-\lambda(t_1 - S_{k_1})} = \int_0^{t_1} \frac{\lambda(\lambda x)^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t_1 - x)} dx =$$
$$= e^{-\lambda t_1} \int_0^{t_1} \frac{\lambda(\lambda x)^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!} dx = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1}.$$

Из (8.17) и (8.16) получаем (8.14) и в случае $k_1 \geqslant 1$. □

Далее мы **сосредоточимся на изучении *однородных марковских процессов* на** $T = [0, \infty)$ (или $T = \{\Delta k,\ k = 0, 1, \ldots\}$, $\Delta > 0$), т. е. таких, что при всех

$s, t, s+h, t+h \in T$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$, $x \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{B}$

$$P(s, x, t, B) = P(s+h, x, t+h, B). \tag{8.18}$$

Поскольку в этом случае переходная функция зависит лишь от $t - s$, то мы будем обозначать $P(s, x, s+t, B)$, как $P(x, t, B)$, $t \in T$. Для однородной марковской цепи положим $p_{ij}(t) = p_{ij}(s, s+t)$, $s, t \in T$, и пусть $P(t)$ — матрица, состоящая из $p_{ij}(t)$. Легко видеть, что в этом случае уравнение (8.4) приобретает вид

$$P(s+t) = P(s)P(t), \quad s, t \in T. \tag{8.19}$$

Иначе говоря, **однородная марковская цепь порождает** *стохастическую полугруппу* $P(t)$, $t \in T$, т. е. такую, что для всех $i, j \in \mathcal{X}$ и $t \in T$

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{8.20}$$

(последнее свойство в (8.20) означает, что $P(0) = I$ — единичная матрица). Заметим, что **изучение неоднородных марковских процессов может быть сведено к исследованию однородных за счет расширения исходного фазового пространства** (см., напр., упр. 7.25). Всюду далее $T = [0, \infty)$, переформулировки для дискретного T оставляем в качестве элементарного упражнения.

Теорема 8.6 (эргодическая теорема). *Пусть для некоторого $j_0 \in \mathcal{X}$ и некоторых $h, \delta > 0$*

$$p_{ij_0}(h) \geqslant \delta \quad \forall i \in \mathcal{X}. \tag{8.21}$$

Тогда (какое бы ни было начальное распределение) для любых i, j существует

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j^*, \tag{8.22}$$

причем для всех $t \geqslant 0$

$$|p_{ij}(t) - p_j^*| \leqslant (1-\delta)^{[t/h]}, \tag{8.23}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Наглядный смысл этого результата состоит в том, что **за большое время система, описываемая марковской цепью, как бы «забывает», откуда стартовала**.

□ Обозначим для каждого $t \in T$

$$m_j(t) = \inf_i p_{ij}(t), \quad M_j(t) = \sup_i p_{ij}(t).$$

Очевидно, $m_j(t) \leqslant p_{ij}(t) \leqslant M_j(t)$ при всех $i, j \in \mathcal{X}$ и $t \in T$. Покажем, что $m_j(t) \nearrow$ и $M_j(t) \searrow$ при $t \to \infty$ и что $M_j(t) - m_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда (8.22) будет установлено.

Для $s, t \in T$ имеем, учитывая (8.19), (8.20),

$$m_j(s+t) = \inf_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \geqslant m_j(t) \inf_i \sum_k p_{ik}(s) = m_j(t),$$
$$M_j(s+t) = \sup_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \leqslant M_j(t) \sup_i \sum_k p_{ik}(s) = M_j(t).$$

Далее, для $t, h, t-h \in T$, воспользовавшись (8.19), имеем

$$\begin{aligned}
M_j(t) - m_j(t) &= \sup_i p_{ij}(t) + \sup_r(-p_{rj}(t)) = \\
&= \sup_{i,r}(p_{ij}(t) - p_{rj}(t)) = \sup_{i,r} \sum_k (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) p_{kj}(t-h) = \\
&= \sup_{i,r}\Big\{ \sum_k{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) p_{kj}(t-h) + \sum_k{}^{-} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) p_{kj}(t-h) \Big\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{i,r}\Big\{ M_j(t-h) \sum_k{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) + m_j(t-h) \sum_k{}^{-} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) \Big\},
\end{aligned}$$

где $\sum\limits_k{}^{+}$ обозначает сумму по тем k, для которых $p_{ik}(h) - p_{rk}(h) \geqslant 0$, а $\sum\limits_k{}^{-}$ — по k, таким что $p_{ik}(h) - p_{rk}(h) < 0$. Поскольку $\sum\limits_k p_{ik}(h) = \sum\limits_k p_{rk}(h) = 1$, то

$$\sum_k{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) + \sum_k{}^{-} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) = 0.$$

Поэтому

$$M_j(t) - m_j(t) \leqslant (M_j(t-h) - m_j(t-h)) \sup_{i,r} \sum{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)).$$

Теперь заметим, что если j_0 не входит в $\sum^{+}$, то в силу (8.22)

$$\sum_k{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) \leqslant \sum_k{}^{+} p_{ik}(h) \leqslant 1 - p_{ij_0}(h) \leqslant 1 - \delta,$$

если же j_0 входит в $\sum\limits_k{}^{+}$, то, снова учитывая (8.22), получаем

$$\sum_k{}^{+} (p_{ik}(h) - p_{rk}(h)) \leqslant \sum_k{}^{+} p_{ik}(h) - p_{rj_0}(h) \leqslant 1 - \delta.$$

Следовательно,

$$M_j(t) - m_j(t) \leqslant (1-\delta)(M_j(t-h) - m_j(t-h)). \tag{8.24}$$

Действуя таким образом $[t/h]$ раз и пользуясь тем, что $M_j(u) - m_j(u) \leqslant 1$, где $u = t - [t/h]h$, согласно (8.24) приходим к оценке (8.23). □

Следствие 8.7. *Пусть для любых $i, j \in \mathcal{X}$ справедливо* (8.22). *Тогда для всех $j \in \mathcal{X}$ существует*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j^*, \tag{8.25}$$

где $p_j(t) = P(X_t = j)$, причем если выполнено (8.21), *то*

$$|p_j(t) - p_j^*| \leqslant (1-\delta)^{[t/h]}.$$

□ По формуле полной вероятности $p_j(t) = \sum\limits_i p_i(0) p_{ij}(t)$. Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для каждого $j \in \mathcal{X}$

$$p_j(t) - p_j^* = \sum_i p_i(0)(p_{ij}(t) - p_j^*) \to 0 \ \text{ при } t \to \infty.$$

Если имеет место (8.21), то

$$|p_j(t) - p_j^*| = \left|\sum_i p_i(0)(p_{ij}(t) - p_j^*)\right| \leqslant (1-\delta)^{[t/h]} \sum_i p_i(0) = (1-\delta)^{[t/h]}. \ \square$$

Следствие 8.8. *Пусть для любых $i, j \in \mathcal{X}$ справедливо (8.22). Тогда при каждом $t \in T$*

$$p_j^* = \sum_i p_i^* p_{ij}(t), \tag{8.26}$$

т. е. p^* есть собственный вектор матрицы $P^*(t)$ (транспонированной $P(t)$).

$\square$ В силу (8.25) для любого $j \in \mathcal{X}$ и $N \in \mathbb{N}$

$$p_j^* = \lim_{s\to\infty} p_j(s+t) = \lim_{s\to\infty} \sum_i p_i(s)p_{ij}(t) \geqslant \lim_{s\to\infty} \sum_{i\leqslant N} p_i(s)p_{ij}(t) = \sum_{i\leqslant N} p_i^* p_{ij}(t).$$

Итак, $p_j^* \geqslant \sum\limits_i p_i^* p_{ij}(t)$. Допустим, что

$$p_j^* > \sum_i p_i^* p_{ij}(t) \tag{8.27}$$

для некоторых j и $t \geqslant 0$. Согласно (8.22) для любого N и каждого i имеем $\sum\limits_{j\leqslant N} p_j^* = \lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{j\leqslant N} p_{ij}(t) \leqslant 1$, поэтому

$$\sum_j p_j^* \leqslant 1. \tag{8.28}$$

Итак, из (8.27) вытекает, что

$$\sum_j p_j^* > \sum_j \sum_i p_i^* p_{ij}(t) = \sum_i p_i^* \sum_j p_{ij}(t) = \sum_i p_i^*.$$

Пришли к противоречию. $\square$

Следствие 8.9. *Пусть для любых $i, j \in \mathcal{X}$ справедливо (8.22). Тогда либо $\sum\limits_j p_j^* = 1$, т. е. p_j^* образуют распределение вероятностей, называемое* ***стационарным****, либо $\sum\limits_j p_j^* = 0$, т. е. все $p_j^* = 0$.*

$\square$ Если $\sum\limits_j p_j^* \neq 0$ (ряд сходится согласно (8.28)), то возьмем $p_i(0) = p_i^* / \sum\limits_j p_j^*$, $i \in \mathcal{X}$, и рассмотрим цепь с таким начальным распределением и заданными $p_{ij}(t)$, что возможно в силу теоремы 8.1. Тогда по следствию 8.8 для всех t и $j \in \mathcal{X}$

$$p_j(t) = \sum_i p_i(0)p_{ij}(t) = \frac{\sum\limits_i p_i^* p_{ij}(t)}{\sum\limits_j p_j^*} = \frac{p_j^*}{\sum\limits_j p_j^*} = p_j(0). \tag{8.29}$$

Согласно (8.25) имеем $p_j^* = p_j(0)$. Следовательно, $\sum\limits_j p_j^* = 1$. $\square$

Термин "стационарное распределение" связан со следующим обстоятельством. Процесс $\{X_t,\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ называется *стационарным* (*строго стационарным* или *стационарным в узком смысле*), если для всех $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ и всех $h \in \mathbb{R}$ таких, что $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ имеем

$$\mathcal{L}(X_{h+t_1}, \dots, X_{h+t_n}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

Иначе говоря, **все конечномерные распределения процесса не должны меняться при сдвигах** (не выводящих из параметрического множества T; это замечание существенно, если, например, $T = \mathbb{Z}$). Справедлива

Теорема 8.10. *Пусть однородный марковский процесс $X = (X_t,\, t \geqslant 0)$ имеет стационарное распределение $\{p_j^*\}$. Пусть $Y = (Y_t,\, t \geqslant 0)$ – (однородный) марковский процесс, имеющий* ***те же переходные вероятности, что X, и начальное распределение*** *$\{p_j^*\}$. Тогда Y –* ***строго стационарный процесс****.*

□ Процесс Y существует согласно теореме 8.1. Из (8.7), записав Y вместо X, получим для $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $B_k \subset \mathcal{X}$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n) = \sum_{j_1 \in B_1} p_{j_1}(t_1) \sum_{j_2 \in B_2} p_{j_1 j_2}(t_1, t_2) \ldots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1}, t_n),$$

здесь $p_j(t) = P(Y_t = j) = p_j^*$ при всех $j \in \mathcal{X}$, $t \geqslant 0$ в силу (8.29). Остается заметить, что $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(s+h, t+h)$ для любых $i, j \in \mathcal{X}$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $h \geqslant -s$. □

Подчеркнем, что при доказательстве **мы использовали не** (8.22), **а** (8.29), **т.е. наличие такого начального распределения, которое не меняется во времени** (т.е. $P(X_t = j) = P(X_0 = j)$ для всех $j \in \mathcal{X}$ и $t \geqslant 0$). Другими словами, главную роль играла *инвариантная мера.*

Дополнения и упражнения.

В связи с пуассоновским процессом мы **обсудим более детально элементарную конструкцию точечного случайного процесса без кратных точек** (общее определение случайной меры дано в дополнении 6, после упр. 6.42). Пусть на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана последовательность случайных величин τ_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что с вероятностью единица, т.е. для $\omega \in \Omega_0$, где $P(\Omega_0) = 1$, имеем

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \ \text{ и } \tau_n \to \infty \ \text{ при } n \to \infty. \tag{8.30}$$

Определим *точечную случайную меру* $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_+ = \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, положив

$$\nu(B, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\tau_k(\omega)}(B), \quad \text{где } \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\ \omega \in \Omega, \tag{8.31}$$

здесь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, δ_x – мера Дирака. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega_0$, очевидно, $\nu(\cdot, \omega)$ есть целочисленная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Условие (8.30) влечет, что $\nu(\cdot, \omega)$ для каждого $\omega \in \Omega_0$ является *мерой Радона*, т.е. мерой, конечной на компактных подмножествах $\mathbb{R}_+$, а, следовательно, $\nu(\cdot, \omega)$ есть σ-конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ для этих ω.

Упр. 8.1. Объясните, почему $\nu(B, \cdot) \in \mathcal{F}|\mathcal{A}$ при любом $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, где $\mathcal{A}$ – σ-алгебра всех подмножеств $\overline{\mathbb{N}}_+$, т.е. $\mathcal{A}$ состоит из всевозможных конечных или счетных подмножеств $\overline{\mathbb{N}}_+$.

Рассмотрим эквивалентное описание рассматриваемого точечного процесса. Выберем в качестве Ω множество последовательностей $\omega = (t_1, t_2, \dots)$, для которых $0 < t_1 < t_2 < \dots$ и $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Обозначим $\{\pi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – семейство координатных отображений Ω, т.е. $\pi_n(\omega) = t_n$ для $\omega = (t_1, t_2, \dots)$. Введем на Ω σ-алгебру $\mathcal{F} = \sigma\{\pi_n, n \in \mathbb{N}\}$ (см. замечание 1.3) и определим

$$\nu(B, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{t_k}(B) \quad \text{для } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \ \omega \in \Omega. \tag{8.32}$$

В этом случае $\nu(\cdot, B)$ есть мера Радона **при каждом** $\omega \in \Omega$. Достаточно ввести меру на $\mathcal{F}$, переобозначить π_n на τ_n, чтобы прийти к (8.30).

Заметим, что описанные конструкции дают случайные точечные меры *без кратных точек*, т.е. справедливо условие

$$\nu(\{t\}, \omega) \leqslant 1 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}_+ \text{ и } \omega \in \Omega_0.$$

Введем *точечный случайный процесс*

$$Y = \{Y(t, \omega) = \nu((0, t], \omega) \ \text{ при } \ t > 0 \ \text{ и } \ Y(0, \omega) = 0\}.$$

Тогда

$$Y(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{(0,t]}(\tau_k(\omega)), \ t > 0. \tag{8.33}$$

Очевидно, $\{Y(t) \geqslant n\} = \{\tau_n \leqslant t\}$ для $t \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}_+ = \{0, 1, \dots\}$, поэтому $Y(t, \cdot) \in \mathcal{F}|\mathcal{A}$ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$.

Упр. 8.2. Определим $m(B) = \mathsf{E}\nu(B, \cdot)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Будет ли функция $m(\cdot)$ мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$? Вспомните, что ведущая мера пуассоновского процесса $N(t)$, $t \geqslant 0$, получалась именно таким образом ($m((s,t]) = \mathsf{E}(N(t) - N(s))$, $0 \leqslant s < t < \infty$).

Упр. 8.3. (сравните с теоремой Д6.10). Докажите, что точечный случайный процесс (8.33) является пуассоновским, если Y имеет независимые приращения, и Y стохастически непрерывен на $\mathbb{R}_+$ (см. (2.35)).

Упр. 8.4. По теореме 7.7 (точнее, ее аналогу для $T = \mathbb{N}$) величины $\tau_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$ образуют цепь Маркова, как суммы независимых слагаемых. Будет ли марковским процесс (8.33), если $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}\}$ – произвольная цепь Маркова, удовлетворяющая условию (8.30)?

Упр. 8.5. Докажите, что для стандартного пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda > 0$ имеем $N(t)/t \to \lambda$ п.н. при $t \to \infty$.

Упр. 8.6. [парадокс времени ожидания] Пусть пуассоновский процесс $\{\nu_t, t \geqslant 0\}$ определяется формулой (8.12). Найдите при фиксированном $t > 0$ распределение случайной величины $\zeta_t = \sum_{j=1}^{\nu_t+1} \xi_j - t$, т.е. величины "перескока" за уровень накапливающихся частных сумм $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $k \in \mathbb{N}$. Результат этой задачи имеет любопытную интерпретацию. Пусть ξ_j – это случайные интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Спрашивается, сколько времени Вы будете ждать появления ближайшего автобуса, если оказались на остановке в момент t?

Упр. 8.7. (продолжение упражнения 8.6). Докажите, что для каждого фиксированного $t > 0$ величины $\zeta_t, \xi_{\nu_t+2}, \xi_{\nu_t+3}, \dots$ образуют последовательность независимых экспоненциально распределенных с параметром λ случайных величин.

Теорема 8.4 делает естественным определение *определение дважды стохастического процесса* (или *процесса Кокса*). Пусть $\Lambda(t,\omega)$ – случайный процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеющий неубывающие траектории (пусть непрерывный справа и имеющий предел слева в каждой точке $t > 0$, в нуле – только предел справа). Пусть на том же вероятностном пространстве определен стандартный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda = 1$. Введем процесс Кокса $Z(t,\omega) = \nu_{\Lambda(t,\omega)}(\omega)$.

Упр. 8.8. Будет ли процесс Кокса марковским?

Определим *процесс дробового шума*

$$X(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(t - \tau_k(\omega)),\ t \geqslant 0, \tag{8.34}$$

где ограниченная борелевская функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ финитна, случайные величины τ_k ($k \in \mathbb{N}$) удовлетворяют условию (8.30) (тогда ряд (8.34) сходится при каждом $t \geqslant 0$ на множестве Ω_0).

Упр. 8.9. Найдите ковариационную функцию процесса (8.34). Достаточно ли для сходимости ряда (8.34) с вероятностью единица при каждом $t \geqslant 0$ потребовать, чтобы ограниченная функция ϕ была интегрируема по Лебегу?

Рассмотрим теперь простейшую **конструкцию маркированного точечного процесса**. Пусть кроме последовательности случайных величин τ_k, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию (8.30), на том же $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ имеется последовательность действительных случайных величин η_k, $k \in \mathbb{N}$. Например, в случайный момент времени τ_k страховая компания выплачивает некоторую случайную сумму η_k, т.е. момент τ_k отмечен ("маркирован") величиной η_k. Определим функцию

$$\mu(C;\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(\tau_k(\omega),\eta_k(\omega))}(C),\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \omega \in \Omega.$$

Согласно (8.31) имеем $\nu(B,\omega) = \mu(B \times \mathbb{R};\omega)$. Введем *считающую функцию*

$$Y(t,D;\omega) = \mu((0,t] \times D;\omega),\ t \geqslant 0,\ D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$Y(t,D;\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in \{Y(t) = 0\}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{}\tau_k \leqslant t, \eta_k \in D\}(\omega), & \text{если } \omega \in \{Y(t) \geqslant 1\}, \end{cases}$$

где $Y(t)$ определяется формулой (8.33). Другими словами,

$$Y(t,D) = \begin{cases} 0 & \text{на } \{Y(t) = 0\}, \\ \sum_{k=1}^{Y(t)} \mathbb{1}_D(\eta_k) & \text{на } \{Y(t) \geqslant 1\}. \end{cases} \tag{8.35}$$

Упр. 8.10. Нарисуйте график траектории $Y(t,D)$, $t \geqslant 0$, при фиксированном $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Упр. 8.11. Пусть $Y(t)$, $t \geqslant 0$ – пуассоновский процесс с ведущей мерой m. Пусть $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность н.о.р. действительных случайных величин с $\mathcal{L}(\eta_k) = Q$. Возьмем $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ такое, что $Q(D) > 0$. Докажите, что "*прореженный процесс*" $Y(t,D)$, $t \geqslant 0$, определенный формулой (8.35), является пуассоновским с ведущей мерой $m(\cdot)Q(D)$.

Теперь мы **обратимся к изложению начал очень важной теории полугрупп операторов**, тесно связанной с изучением марковских процессов. Семейство операторов $\{T_t,\ t \geqslant 0\}$, действующих на банаховом пространстве B (с нормой $\|\cdot\|$) называется *полугруппой*, если

$$T_0 = I \ \text{ и } \ T_{s+t} = T_s T_t \ \text{ для всех } s,t \geqslant 0. \tag{8.36}$$

Полугруппа называется *равномерно ограниченной*, если

$$\sup_{t \geqslant 0} \|T_t\| \leqslant M < \infty. \tag{8.37}$$

Для оператора $L:\ B \to B$ его норма

$$\|L\| = \sup\{\|Lf\|/\|f\|,\ f \in B,\ f \neq 0\} \tag{8.38}$$

(одно и то же обозначение для нормы опратора и нормы элемента B не вызовет недоразумений, т.к. каждый раз ясно, о каком объекте идет речь). Полугруппа $(T_t)_{t \geqslant 0}$ называется сжимающей, если $M = 1$ в (8.37), т.е. $\|T_t f\| \leqslant \|f\|$ для всех $f \in B$ и $t \geqslant 0$.

Упр. 8.12. Пусть $P(x,t,B)$ – переходная функция однородного марковского процесса $(X_t,\ t \geqslant 0)$, см. (7.19). Докажите, что формула

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathcal{X}} f(y) P(x,t,dy) \tag{8.39}$$

задает сжимающую полугруппу на банаховом пространстве $B(\mathcal{X};\mathbb{R})$, введенном перед упр. 6.15.

Заметим, что (8.39) можно записать также в виде

$$(T_t f)(x) = \mathsf{E}_x f(X_t), \tag{8.40}$$

где E_x подчеркивает, что $\mathcal{L}(X_0) = \delta_x$. Другими словами, марковский процесс $(X_t,\ t \geqslant 0)$ начинается в момент $t = 0$ из точки $x \in \mathcal{X}$.

Полугруппа $(T_t)_{t \geqslant 0}$ называется *сильно непрерывной в нуле*, или C_0-*полугруппой*, если для любого $f \in B$

$$s - \lim_{t \to 0+} T_t f = f, \tag{8.41}$$

где $s - \lim$ обозначает предел по норме в B, т.е. $\|T_t f - f\| \to 0$ при $t \to 0+$.

Упр. 8.13. Докажите, что если равномерно по $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{t \to 0+} P(x,t,B) = \delta_x(B) \ \text{ при каждом } \ B \in \mathcal{B}, \tag{8.42}$$

где δ_x – мера Дирака, то формула (8.39) задает C_0-полугруппу на $B(\mathcal{X},\mathbb{R})$.

В связи с (8.39) заметим, что если на $B(\mathcal{X},\mathbb{R})$ действует C_0-полугруппа сжатий $(T_t)_{t \geqslant 0}$, то функция

$$Q(x,t,B) := (T_t \mathbb{1}_B)(x),\ x \in \mathcal{X},\ t \geqslant 0,\ B \in \mathcal{B}, \tag{8.43}$$

вообще говоря, не обязана быть переходной функцией однородного марковского процесса, т.е. не обязана обладать всеми свойствами 1') – 4') на с. ??.

Упр. 8.14. Пусть полугруппа $(T_t)_{t\geqslant 0}$ определяется формулой (8.39) по переходной функции (7.18) m-мерного броуновского движения. Покажите, что эта полугруппа не будет класса C_0 на банаховом пространстве $B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. В то же время проверьте, что

$$P(x, t, V_\varepsilon(x)) = 1 - o(t), \quad \text{при} \quad t \to 0+,$$

где $V_\varepsilon(x)$ – открытый шар (в евклидовой метрике) радиуса ε с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$.

Упр. 8.15. Пусть $(T_t)_{t\geqslant 0}$ – сжимающая полугруппа на B и B_0 состоит из тех f, для которых $T_t f$ является функцией, непрерывной справа в точке $t = 0$. Покажите, что $T_t f$ равномерно непрерывна на $[0, \infty)$ для каждого $f \in B_0$. Проверьте, что B_0 является линейным подпространством (замкнутым линейным многообразием) и $T_t B_0 \subset B_0$ для любого $t \geqslant 0$.

Упр. 8.16. (см. [**?**, с. ??]) Пусть Q – центрированная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, т.е. распределение гауссовского вектора с нулевым средним. Докажите, что формула

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + (1 - e^{-2t})^{1/2}y)Q(dy), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \geqslant 0, \tag{8.44}$$

задает на пространстве $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ при каждом $p \geqslant 1$ сжимающую C_0-полугруппу, называемую *полугруппой Орнштейна – Уленбека.*

Генератор A (инфинитезимальный оператор) полугруппы $(T_t)_{t\geqslant 0}$ определяется формулой

$$Af = s - \lim_{t\to 0+} \frac{T_t f - f}{t} \tag{8.45}$$

на тех элементах f, для которых указанный предел существует. Легко видеть, что область определения $\mathcal{D}_A$ оператора A есть линейное многообразие (если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_A$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{D}_A$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Иначе говоря,

$$Af = \frac{d^+}{dt}(T_t f)|_{t=0} \quad \text{для } f \in \mathcal{D}_A. \tag{8.46}$$

Пример Д8.17. Пусть A – генератор полугруппы, введенной в упражнении 8.14. Обозначим $C_{b,u}(\mathbb{R}^m)$ класс ограниченных, равномерно непрерывных на $\mathbb{R}^m$ действительных функций. Пусть

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^m), \ k, j = 1, \dots, m. \tag{8.47}$$

Докажем, что для таких f (напомним, что в упр. 8.14 фигурируют ограниченные измеримые функции, поэтому используемые f будут ограничены и непрерывны)

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f, \tag{8.48}$$

где Δ – оператор Лапласа.

□ Обозначим $\|\cdot\|$ евклидову норму в $\mathbb{R}^m$. Для $t > 0$ и рассматриваемых f имеем

$$\frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m} f(y)e^{-\|y-x\|^2/(2t)}dy - f(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{t(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} (f(x + z\sqrt{t}) - f(x)) e^{-\|z\|^2/2} dz.$$

По формуле Тейлора

$$f(x + z\sqrt{t}) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} z_k \sqrt{t} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} z_k z_j t \frac{\partial^2 f(x + \theta z\sqrt{t})}{\partial x_k \partial x_j}, \tag{8.49}$$

где $\theta = \theta(x, z\sqrt{t}) \in \mathbb{R}$, $|\theta| \leqslant 1$. Учитывая, что $\int_{\mathbb{R}} g(u)du = 0$, если g – нечетная интегрируемая функция, получим

$$|t^{-1}(T_t f(x) - f(x)) - (1/2)\Delta f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \sum_{k,j=1}^{m} \left| \frac{\partial^2 f(x + \theta z\sqrt{t})}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right| e^{-\|z\|^2/2} |z_k||z_j| dz =: I(x,t). \tag{8.50}$$

Из (8.47) вытекает, что интеграл $I(x,t)$ в правой части (8.50) существует при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $t > 0$. Разобьем $I(x,t)$ на интеграл $I_r(x,t)$, берущийся по шару $B_r = \{\|z\| \leqslant r\}$ и интеграл $J_r(x,t)$ – по множеству $\{\|z\| > r\}$. В силу ограниченности вторых производных f для любого ε найдется $r(\varepsilon) > 0$ такое, что $J_r(x,t) < \varepsilon/2$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $t > 0$. Учитывая (8.47) и то, что $\|z\sqrt{t}\| \leqslant r\sqrt{t}$ для $z \in B_r$, получим $I_r(x,t) < \varepsilon/2$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $0 < t < t_0(\varepsilon)$. □

Напомним элементарные факты об интегрировании и дифференцировании функций со значениями в банаховом пространстве. Если функция g определена в окрестности точки $t \in \mathbb{R}$ и принимает значения в банаховом пространстве B, то ее производной в точке t называется (если существует)

$$s - \lim_{h \to 0} (g(t+h) - g(t))/h.$$

Для функции $g : [a,b] \to B$, непрерывной на $[a,b]$ (в концах отрезка – односторонняя непрерывность), а следовательно, равномерно непрерывной на $[a,b]$, существует $\int_a^b g(t)dt$, который определяется также, как интеграл Римана для действительной функции, только предел интегральных сумм понимается как предел по норме в B. Так построенный интеграл обладает свойством линейности. Из определения сразу вытекает неравенство

$$\left\| \int_a^b g(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \|g(t)\| dt \tag{8.51}$$

(норма непрерывной функции есть, очевидно, непрерывная функция). Заметим также, что если функция g непрерывна на $[a+h, b+h]$, то

$$\int_a^b g(t+h)dt = \int_{a+h}^{b+h} g(t)dt. \tag{8.52}$$

Если dg/dt – непрерывная функция на $[a,b]$ (в концах – односторонняя непрерывность), то

$$\int_a^b \frac{dg}{dt} dt = g(b) - g(a). \tag{8.53}$$

Это тривиально вытекает из оценки $\|g(u) - g(v)\| \leqslant \sup_{t \in [v,u]} \|dg/dt\|(u - v)$ для всех $a \leqslant v < u \leqslant b$ (поясните, пожалуйста). Если g – непрерывна справа в точке $u \in \mathbb{R}$, то существует

$$s - \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_u^{u+h} g(t)dt = g(u). \tag{8.54}$$

Упр. 8.18. Докажите, что если функция $g : [a,b] \to B$ и непрерывна на $[a,b]$, а L – ограниченный линейный оператор на B, то

$$L\left(\int_a^b g(t)dt\right) = \int_a^b Lg(t)dt. \tag{8.55}$$

Упр. 8.19. Пусть $(T_t)_{t\geqslant 0}$ – сжимающая C_0-полугруппа с генератором A. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}_A$, то функция $T_t f$ дифференцируема в каждой точке $t \geqslant 0$ (при $t = 0$ дифференцируема справа), причем

$$T_t f \in \mathcal{D}_A, \tag{8.56}$$

$$\frac{dT_t f}{dt} = AT_t f = T_t Af, \tag{8.57}$$

$$T_t f - f = \int_0^t T_s Af ds. \tag{8.58}$$

Упр. 8.20. Докажите, что генератор A C_0-полугруппы $(T_t)_{t\geqslant 0}$ *замкнут* т.е. его *график* (множество $\{(f, Af),\ f \in \mathcal{D}_A\}$) замкнут в $B \times B$. Другими словами, если $f_n \in \mathcal{D}_A$ и $f_n \to f$, $Af_n \to g$ при $n \to \infty$ (сходимость по норме в B), то $f \in \mathcal{D}_A$ и $Af = g$.

Упр. 8.21. Докажите, что $B_0 = [\mathcal{D}_A]$, где B_0 определено в упражнении 8.14, здесь A – генератор сжимающей полугруппы $(T_t)_{t\geqslant 0}$, а $[\cdot]$ обозначает замыкание множества в B. В частности, $\mathcal{D}_A$ плотно в B для генератора сжимающей C_0-полугруппы $(T_t)_{t\geqslant 0}$.

Упр. 8.22. Докажите, что при $m > 1$ оператор Лапласа не является замкнутым на совокупности $\mathcal{M}$ функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (8.47). Поэтому упр. 8.20 и пример Д8.17 показывают, что $\mathcal{D}_A$ в этом примере строго шире, чем $\mathcal{M}$.

Упр. 8.23. Найдите $\mathcal{D}_A$ для полугруппы, введенной в упр. 8.14 при $m = 1$.

Известно (см., напр., [?]), что если имеется замкнутый линейный оператор L, для которого $\mathcal{D}_L = B$, то L ограничен. Заметим, что в примере Д8.17 оператор A не является ограниченным на множестве функций, удовлетворяющих (8.47), а значит он неограничен.

Значительный интерес представляет следующее упражнение.

Упр. 8.24. Для любого ограниченного оператора L на банаховом пространстве B существует C_0-полугруппа, имеющая L своим генератором. А именно, проверьте, что **формула**

$$T_t = e^{tL}, \quad t \geqslant 0, \tag{8.59}$$

где $e^{tL} := \sum_{n=0}^{\infty}(tL)^n/n!$ (этот ряд дает ограниченный линейный оператор при каждом $t \geqslant 0$, поскольку $\sum_{n=0}^{\infty}\|tL\|^n/n! < \infty$) **задает искомую полугруппу**, которая будет также удовлетворять условию

$$\|T_t\| \leqslant e^{\alpha|t|}, \quad t \geqslant 0, \tag{8.60}$$

где $\alpha = \|L\|$.

Здесь же, в связи с упр. 8.19 и 8.24 сформулируем следующий результат.

Упр. 8.25. Если A – генератор (необязательно ограниченный) полугруппы $(T_t)_{t\geqslant 0}$, то для каждого $f \in \mathcal{D}_A$ функция $T_t f$ есть единственное решение $z(t)$ уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t),$$

удовлетворяющее условию $\|z(t)\| \leqslant ce^{\alpha t}$ при некоторых $c, \alpha > 0$ и всех $t > 0$, и условию $\|z(t) - f\| \to 0$ при $t \to 0+$.

Если A **– неограниченный замкнутый оператор на** $\mathcal{D}_A \subset B$ (и, следовательно, $\mathcal{D}_A \neq B$), **то вопрос, является ли он генератором некоторой** C_0**-полугруппы** (в частности, C_0-полугруппы сжатий) **значительно сложнее. Здесь важную роль играет понятие резольвенты.**

Пусть $(T_t)_{t\geqslant 0}$ – сжимающая полугруппа на банаховом пространстве. Семейство операторов

$$R_\lambda g := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t g dt, \quad \text{где} \;\; g \in B, \; \lambda > 0, \tag{8.61}$$

называется *резольвентой полугруппы*. Интеграл в (8.61) определяется как предел (по норме) интегралов от 0 до u при $u \to \infty$. Иначе говоря, $R_\lambda g$ – это преобразование Лапласа (непрерывной) функции $T_t g$. Из (8.61) сразу вытекает, что

$$\|R_\lambda\| \leqslant 1/\lambda \;\; \text{для} \;\; \lambda > 0. \tag{8.62}$$

Упр. 8.26. Докажите, что для любого $g \in B$

$$s - \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda g = g. \tag{8.63}$$

Теорема Д8.27. *Пусть $(T_t)_{t\geqslant 0}$ – сжимающая полугруппа с генератором A. Тогда для каждого $\lambda > 0$ имеем*

$$R_\lambda : \; B \to \mathcal{D}_A, \tag{8.64}$$

$$(\lambda I - A) : \; \mathcal{D}_A \to B, \tag{8.65}$$

здесь I – тождественный оператор, причем

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}. \tag{8.66}$$

□ **Проверим** (8.64). Пользуясь (8.55), (8.52) и линейностью интеграла, видим, что для $g \in B$ и $\lambda > 0$

$$\frac{1}{t}(T_t - I)R_\lambda g = \frac{1}{t}(T_t - I)\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g ds = \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(T_{t+s}g - T_s g)ds =$$

$$= \frac{1}{t}\left\{ e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda u} T_u g du - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g ds \right\} =$$

$$= -\frac{1}{t}e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda u} T_u g du + \frac{1}{t}(e^{\lambda t} - 1)\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g ds =$$

$$= -\frac{1}{t}e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda u} T_u g du + \frac{1}{t}(e^{\lambda t} - 1)R_\lambda g.$$

Переходя к пределу при $t \to 0+$, в силу (8.54), получаем

$$AR_\lambda g = -g + \lambda R_\lambda g. \tag{8.67}$$

Таким образом, (8.64) **установлено**. Соотношение (8.67) означает, что **для** $g \in B$ **и** $\lambda > 0$ **уравнение**

$$\lambda f - Af = g \tag{8.68}$$

имеет решение $f = R_\lambda g$. **Допустим, что** (8.68) **имеет решения** f_1 **и** f_2. Тогда $v = f_1 - f_2 \in \mathcal{D}_A$ и $\lambda v - Av = 0$. Согласно (8.57)

$$\frac{dT_t v}{dt} = T_t A v = \lambda T_t v.$$

Поэтому, используя аналог формулы дифференцирования произведения действительных функций, получаем

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} T_t v) = 0. \tag{8.69}$$

Нетрудно показать (объясните), что (8.69) равносильно тому, что

$$e^{-\lambda t} T_t v = x \in B \ \text{ при всех } \ t \geqslant 0.$$

Взяв $t \to 0+$, получаем, что $x = v$. Учитывая, что $(T_t)_{t \geqslant 0}$ – сжимающая полугруппа (достаточно выполнения (8.37) или условия (8.60) с некоторым $\alpha > 0$, но тогда в теореме Д8.27 следует рассматривать $\lambda > \alpha$), видим, что

$$0 \leqslant \|v\| = e^{-\lambda t}\|T_t v\| \leqslant e^{-\lambda t}\|v\| \ \text{ при } t \to \infty.$$

Следовательно, $v = 0$ и, значит, уравнение (8.68) имеет единственное решение $f = R_\lambda g$ при любом $\lambda > 0$ и $g \in B$. Таким образом, $\lambda I - A$ **есть взаимно однозначное отображение** $\mathcal{D}_A$ **на** B **и справедливо** (8.66). □

Следствие Д8.28. *Пусть $(T_t)_{t \geqslant 0}$ и $(S_t)_{t \geqslant 0}$ – две C_0-полугруппы сжимающих операторов на B. Если эти полугруппы имеют один и тот же генератор, то $T_t = S_t$ для всех $t \geqslant 0$.*

□ Из теоремы Д8.27 вытекает, что у полугрупп $(T_t)_{t \geqslant 0}$ и $(S_t)_{t \geqslant 0}$ совпадают резольвенты в силу (8.66). Возьмем функционал $F \in B^*$. Тогда, учитывая (8.55), для любого $g \in B$ и $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} F(T_t g - S_t g)dt = 0.$$

Поэтому $T_t g = S_t g$ для $t \geqslant 0$, $g \in B$. Мы воспользовались тем, что **преобразование Лапласа есть взаимно-однозначное отображение, определенное на классе ограниченных, непрерывных на** $[0, \infty)$ **действительных функций** (см., напр., [?]). □

Это следствие показывает, что **ограниченный линейный оператор** L **может быть генератором полугруппы только вида** (8.59).

Теорема Д8.29 (Хилле – Иосида). *Пусть B – банахово пространство и A – линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}_A \subset B$. Оператор A является генератором сжимающей C_0-полугруппы на B тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия.*

1. $[\mathcal{D}_A] = B$ *($\mathcal{D}_A$ плотно в B).*

2. *Для любого $g \in B$ и любого $\lambda > 0$ уравнение $\lambda f - Af = g$ имеет единственное решение $f \in \mathcal{D}_A$.*

3. *Для этого решения f справедливо неравенство $\|f\| \leqslant \|g\|/\lambda$.*

Лекция 9. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга

Условие стандартности марковской цепи. Инфинитезимальная матрица Q стохастической полугруппы $P(t)$, $t \geqslant 0$. Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрица Q^{T}. Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам. Коэффициент загрузки и вероятность потери требования в стационарном режиме.

Сначала мы **получим некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют переходные вероятности однородной марковской цепи, заданной на** $[0, \infty)$, **а затем обсудим приложения этих и ранее установленных результатов**.

Однородная цепь Маркова $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ (или порожденная ею полугруппа $P(t) = (p_{ij}(t))$) называется *стандартной*, если $P(t) \to I$ при $t \to 0+$, т. е. для всех $i, j \in \mathcal{X}$

$$\lim_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}. \tag{9.1}$$

Лемма 9.1. *Для переходных вероятностей однородной марковской цепи* $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ *при всех* $i, j \in \mathcal{X}$ *и любых* $t, h \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leqslant 1 - p_{ii}(h).$$

В частности, если цепь стандартна, то для каждых $i, j \in \mathcal{X}$ *функция* $p_{ij}(t)$ *равномерно непрерывна на* $[0, \infty)$.

□ Имеем

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) = p_{ij}(t)(p_{ii}(h) - 1) + \\ + \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \leqslant \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h)$$

Кроме того, $p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \geqslant p_{ij}(t)(p_{ii}(h) - 1) \geqslant p_{ii}(h) - 1$. □

Теорема 9.2. *Если* $P(t)$, $t \geqslant 0$, *— стандартная стохастическая полугруппа, то существует*

$$\left.\frac{d^+P(t)}{dt}\right|_{t=0} = Q, \tag{9.2}$$

т. е. существуют правые производные в нуле у всех $p_{ij}(t)$:

$$q_{ij} = \left.\frac{d^+p_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}. \tag{9.3}$$

При этом

$$0 \leqslant q_{ij} < \infty \quad \text{для} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad q_i = -q_{ii} \in [0, \infty]. \tag{9.4}$$

Матрица Q называется *инфинитезимальной.*

$\square$ **Фиксируем произвольное** $i \in \mathcal{X}$. В силу (9.1) найдется $\delta > 0$ такое, что $p_{ii}(h) > 0$ при $h \in [0, \delta]$. Для $t > 0$, применяя (8.4), получим, что $p_{ii}(t) \geqslant (p_{ii}(t/n))^n$, $n \in \mathbb{N}$. Взяв $n = n(t, \delta)$ так, чтобы $t/n < \delta$, видим, что $p_{ii}(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Поэтому на $[0, \infty)$ определена функция $H(t) = -\log p_{ii}(t)$ (берется натуральный логарифм). Заметим, что

$$H(s+t) \leqslant H(s) + H(t) \quad \text{для} \quad s, t \in [0, \infty), \tag{9.5}$$

поскольку $p_{ii}(s+t) \geqslant p_{ii}(s) p_{ii}(t)$ в силу (8.19) для $s, t \geqslant 0$. Положим

$$q = \sup_{t \geqslant 0} H(t)/t. \tag{9.6}$$

Очевидно, $q \in [0, \infty]$. **Рассмотрим отдельно два случая.**

1. Пусть $q < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, такое, что $H(t_0)/t_0 \geqslant q - \varepsilon$. Для $h \in (0, t_0)$ запишем $t_0 = nh + \Delta$, где $n = [t_0/h]$, $0 \leqslant \Delta < h$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Пользуясь (9.5), получаем

$$q - \varepsilon \leqslant H(t_0)/t_0 \leqslant (nH(h) + H(\Delta))/t_0 = \frac{H(h)}{h} \cdot \frac{nh}{t_0} + \frac{H(\Delta)}{t_0}. \tag{9.7}$$

В силу (9.1) $H(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$ ($\Delta \to 0$, если $h \to 0+$). Поэтому

$$q - \varepsilon \leqslant \liminf_{h \to 0+} H(h)/h. \tag{9.8}$$

Из (9.6) вытекает, что $\limsup_{h \to 0+} H(h)/h \leqslant q$. Следовательно, существует $\lim_{h \to 0+} H(h)/h = q$. Теперь заметим, что

$$q = \lim_{h \to 0+} \frac{H(h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{-\log(1 - (1 - p_{ii}(h)))}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}. \tag{9.9}$$

2. Пусть $q = \infty$. Тогда для любого $M > 0$ найдется $t_0 = t_0(M) > 0$ такое, что $H(t_0)/t_0 \geqslant M$. Действуя точно также, как при доказательстве (9.8), получаем, что

$$\liminf_{h \to 0+} H(h)/h \geqslant M.$$

Таким образом, существует $\lim_{h \to 0+} H(h)/h = \infty$. Остается снова учесть (9.9).

Рассмотрим теперь $p_{ij}(t)$ **при** $i \neq j$. Обозначим $f_{ij}^{(k)}(h)$ условную вероятность перехода из состояния i в i ровно за k последовательных шагов длины h (и не за меньшее число шагов), но так, чтобы при этом ни разу не побывать в состоянии j в моменты вида mh, где $m = 1, \dots, k$. Для $n \geqslant 2$ имеем

$$p_{ij}(nh) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)}(h) p_{ij}((n-k)h). \tag{9.10}$$

Действительно, учитывая замечание 8.2, получаем

$$p_{ij}(nh) = P(X_{nh} = j | X_0 = i) = \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in \mathcal{X}} P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_h = j_1 | X_0 = i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{J_k} \sum_{j_{k+1},\dots,j_{n-1}\in\mathcal{X}} P(X_{nh}=j, X_{(n-1)h}=j_{n-1},\dots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)\times$$
$$\times P(X_{kh}=i, X_{(k-1)h}=j_{k-1},\dots,X_h=j_1|X_0=i),$$

где $J_k=\{(j_1,\dots,j_{k-1}):\ \ j_m\notin\{i,j\},\, m=1,\dots,k-1\}$. Мы воспользовались тем, что в силу (8.2)

$$\frac{1}{P(X_0=i)}P(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\dots,X_{kh}=i,\dots,X_h=j_1,X_0=i)=$$
$$=\frac{1}{P(X_0=i)}P(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\dots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i,\dots,X_0=i)\times$$
$$\times\cdot P(X_{kh}=i,\dots,X_0=i)=$$
$$=P(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\dots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)\cdot P(X_{kh}=i,\dots,X_h=j_1|X_0=i).$$

Остается заметить, что

$$\sum_{j_{k+1},\dots,j_{n-1}} P(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\dots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)=p_{ij}((n-k)h),$$

$$\sum_{J_k} P(X_{kh}=i,\dots,X_h=j_1|X_0=i)=f_{ij}^{(k)}(h).$$

Обозначим $p_{ij}^{(k)}(h)$ условную вероятность перехода из состояния i в состояние j ровно за k шагов длины h (и не за меньшее число шагов). Тогда, аналогично (9.10) получаем для $k\geqslant 1$ ($\sum_\emptyset=0$)

$$p_{ii}(kh)=f_{ij}^{(k)}(h)+\sum_{m=1}^{k-1}p_{ij}^{(m)}(h)p_{ji}((k-m)h). \tag{9.11}$$

Очевидно, $\sum_{m=1}^{k-1}p_{ij}^{(m)}(h)\leqslant 1$, поэтому

$$f_{ij}^{(k)}(h)\geqslant p_{ii}(kh)-\max_{1\leqslant m\leqslant k-1}p_{ji}((k-m)h)$$

(максимум по пустому множеству считаем равным нулю). В силу (9.1) для любого $\varepsilon>0$ находим $t_0=t_0(\varepsilon,i,j)>0$ такое, что

$$p_{ji}(t)\leqslant\varepsilon,\ p_{ii}(t)\geqslant 1-\varepsilon,\ p_{jj}(t)\geqslant 1-\varepsilon \ \text{ при } t\in[0,t_0]. \tag{9.12}$$

Тогда

$$f_{ij}^{(k)}(h)\geqslant 1-2\varepsilon \ \text{ при } nh\leqslant t_0 \text{ и } k=1,\dots,n-1. \tag{9.13}$$

Замечая, что $p_{ij}((n-k)h)\geqslant p_{ij}(h)p_{jj}((n-k-1)h)$ при $k=1,\dots,n-1$ и $n\geqslant 2$, из (9.10) – (9.13) имеем

$$p_{ij}(nh)\geqslant(1-2\varepsilon)p_{ij}(h)\sum_{k=1}^{n-1}p_{jj}((n-k-1)h)\geqslant(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)(n-2)p_{ij}(h).$$

Взяв $n=[t_0/h]$, и учитывая непрерывность $p_{ij}(t)$ (лемма 9.1), получим

$$\infty>\frac{p_{ij}(t_0)}{t_0}\geqslant(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Теперь, устремив t_0 к нулю, видим, что

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon) \limsup_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось любым, заключаем, что существует конечный $\lim_{t\to 0+} p_{ij}(t)/t$. □

Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $t > 0$, учитывая, что $\sum\limits_j p_{ij}(t) = 1$, получаем

$$\sum_{\substack{j\leqslant N\\ j\neq i}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

В силу (9.3) имеем $\sum\limits_{\substack{j\neq i\\ j\leqslant N}} q_{ij} \leqslant q_i$, а следовательно,

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i; \tag{9.14}$$

при $q_i = \infty$ утверждение (9.14) тривиально.

Цепь называется *консервативной*, если все элементы инфинитезимальной матрицы Q конечны и при этом для любого i

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i. \tag{9.15}$$

Так, согласно (8.8) для пуассоновского процесса с интенсивностью λ

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \text{\Large 0} \\ & -\lambda & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ \text{\Large 0} & & & \end{pmatrix},$$

и (9.15) справедливо.

Теорема 9.3 (*обратная система уравнений Колмогорова*). *Пусть однородная цепь Маркова консервативна. Тогда для всех* $t > 0$

$$P'(t) = QP(t), \tag{9.16}$$

т. е. при любых $i, j \in \mathcal{X}$ *и* $t > 0$ *существуют* $p'_{ij}(t)$, *причем*

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t). \tag{9.17}$$

В силу (9.2) и поскольку $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, уравнение (9.17) будет верно и при $t = 0$, если производную понимать как правую.

□ Для $t \geqslant 0$, $h > 0$ и $i, j \in \mathcal{X}$ положим

$$L_{ij}(h,t) = \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t).$$

Тогда

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t) + L_{ij}(h,t). \tag{9.18}$$

При любом $N \in \mathbb{N}$ в силу (9.3)

$$\varliminf_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \geqslant \varliminf_{h\to 0+} \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) = \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} q_{ik}p_{kj}(t).$$

Следовательно,

$$\varliminf_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \geqslant \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t). \tag{9.19}$$

При $N > i$, учитывая, что $p_{kj}(t) \leqslant 1$ и $\sum\limits_k p_{ik}(h) = 1$, для всех $i, j \in \mathcal{X}$ и $t \geqslant 0$, $h > 0$ получим

$$L_{ij}(h,t) \leqslant \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \frac{1}{h}\sum_{k>N} p_{ik}(h) = \\ = \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \frac{1}{h}\biggl(1 - p_{ii}(h) - \sum_{\substack{k\leqslant N\\ k\neq i}} p_{ik}(h)\biggr).$$

Поэтому

$$\varlimsup_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \leqslant \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} q_{ik}p_{kj}(t) - q_{ii} - \sum_{\substack{k\leqslant N\\ k\neq i}} q_{ik}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \leqslant \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k\neq i} q_{ik} = \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) \tag{9.20}$$

в силу условия (9.15). Из (9.19) и (9.20) вытекает (9.17) для правой производной.

Для $t > 0$ случай $h < 0$ в левой части (9.18), точнее, $h \in [-t, 0)$, рассматривается аналогично (убедитесь в этом). □

Теорема 9.4 (*прямая система уравнений Колмогорова*). *Пусть для переходной функции $P(t)$, $t \geqslant 0$, однородной марковской цепи существует инфинитезимальная матрица Q с конечными элементами q_{ij}, причем для всех $i \neq j$*

$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + \alpha_{ij}(h), \tag{9.21}$$

где равномерно по i

$$\alpha_{ij}(h)/h \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0+\,. \tag{9.22}$$

Тогда для $t > 0$ существует $P'(t)$ (существуют все $p'_{ij}(t)$) и

$$P'(t) = P(t)Q, \tag{9.23}$$

т. е. для всех $i, j \in \mathcal{X}$ и $t > 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}. \tag{9.24}$$

□ Пусть $t \geqslant 0$, $h > 0$ и $i, j \in \mathcal{X}$. Тогда

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h) - 1}{h} + \frac{1}{h}\sum_{k \neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h). \tag{9.25}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при фиксированном j в силу (9.21) находим $h_0(\varepsilon, j) > 0$, такое что $|\alpha_{kj}(h)|/h < \varepsilon$ при всех k и $0 < h < h_0(\varepsilon, j)$, поэтому

$$\left|\sum_{k \neq j} p_{ik}(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \leqslant \varepsilon. \tag{9.26}$$

Из (9.21), (9.26) и того, что $\frac{1}{h}\sum\limits_{k \neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h) \leqslant \frac{p_{ij}(t+h)}{h} \leqslant \frac{1}{h}$, заключаем, что для каждого $t \geqslant 0$ и $i \in \mathcal{X}$ сходится ряд в правой части (9.24). Совершив в (9.25) предельный переход при $h \to 0+$, получим, что (9.23) справедливо для правой производной.

Случай $h < 0$ в левой части (9.25) рассматривается аналогично (проведите соответствующие рассуждения). □

Замечание 9.5. Если пространство состояний $\mathcal{X}$ конечно и матрица $P(t)$ стандартна, то справедливы обе системы Колмогорова. Действительно, для любых $i, j \in \mathcal{X}$, $t > 0$

$$\frac{1}{t}\sum_{j \neq i} p_{ij}(t) = \frac{1 - p_{ii}}{t},$$

и если число состояний конечно, то теоерма 9.2 обеспечивает консервативность. При этом выполнено (9.21), а условие (9.22), очевидно, имеет место, т.к. i принадлежит некоторому множеству $\mathcal{X}$.

Названия обратная и прямая системы связаны с положением матрицы Q в (9.16) и (9.23) («сзади» или «спереди»).

Следствие 9.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.4, *и пусть для всех* $i, j \in \mathcal{X}$ *существует*

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j^* \tag{9.27}$$

(*для этого достаточно выполнения условий теоремы* 8.6). *Тогда для любого* j

$$\sum_k p_k^* q_{kj} = 0, \tag{9.28}$$

т. е. p^* — *собственный вектор матрицы* $Q^\top$ ($Q^\top$ *обозначает транспонированную матрицу* Q), *отвечающий нулевому собственному значению.*

□ Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 9.4, видим, что для каждого j сходится ряд $\sum\limits_k p_k(t)q_{kj}$, где $p_k(t) = P(X_t = k)$, причем при любом начальном распределении существует

$$p_j'(t) = \sum_k p_k(t)q_{kj}. \tag{9.29}$$

Если $\sum\limits_j p_j^* = 0$, т. е. все $p_j^* = 0$, то (9.28), очевидно, выполнено. Если $\sum\limits_j p_j^* \neq 0$, то возьмем начальное распределение $p_i(0) = p_i^*$, $i \in \mathcal{X}$ (см. следствие 8.9). Тогда $p_j(t) = p_j^*$ согласно (8.29). Следовательно, $p_j'(t) = 0$, и из (9.29) вытекает (9.28). □

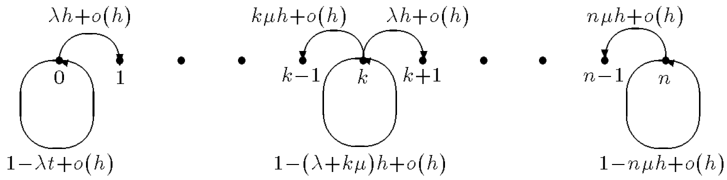

Рис. 9.1

Рассмотрим теперь модель (ее происхождение объясним позднее), **в которой $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, n\}$, а вероятности переходов $p_{ij}(h)$ при $h \to 0+$ имеют вид, указанный на рис.** 9.1. Таким образом, возможны переходы только на один шаг вправо или влево, а также допускается возможность оставаться на месте; в «концевых точках» 0 и n возможны переходы соответственно из 0 в 1 и из n в $n-1$, при этом также разрешается оставаться на месте (λ и μ — положительные параметры). Точнее говоря, пусть **все остальные** $p_{ij}(h) = o(h)$ при $h \to 0+$. Тогда инфинитезимальная матрица имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & & \text{\Large 0} \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & k\mu & -(\lambda+k\mu) & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & (n-1)\mu & -(\lambda+(n-1)\mu) & \lambda \\ \text{\Large 0} & & & & & & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

Покажем, что выполнены условия теоремы 8.6. Возьмем $j_0 = n$. Для любого $i = 0, \ldots, n$

$$p_{in}(nt) \geqslant p_{i,i+1}(t)p_{i+1,i+2}(t)\ldots p_{n-1,n}(t)p_{nn}(nt-(n-i)t) \geqslant \\ \geqslant p_{i,i+1}(t)p_{i+1,i+2}(t)\ldots p_{n-1,n}(t)(p_{nn}(t))^i.$$

Находим $t_0 > 0$, такое что $p_{k-1,k}(t) = \lambda t + o(t) > 0$, $k = 1, \ldots, n$ ($o(\cdot)$ зависит от k) и $p_{nn}(t) > 1/2$ при $0 < t \leqslant t_0$. Выбрав $h = t_0/n$, получаем, что справедливо (8.21). В силу замечания 9.5 выполнены обе системы Колмогорова, при этом, очевидно, $\sum\limits_j p_j^* = 1$, т. к. $\mathcal{X}$ конечно ($\sum\limits_j p_{ij}(t) = 1$ и верно (9.27)). Итак, найдем стационарное распределение p^*, пользуясь следствием 9.6. Решаем систему $Q^\mathsf{T}\vec{p} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & & & & & \text{\Large 0} \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda & -(\lambda+k\mu) & (k+1)\mu & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -(\lambda+(n-1)\mu) & n\mu \\ \text{\Large 0} & & & & & \lambda & -n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Ко второй строке матрицы Q^T добавляем первую, ... , к k-й — все предыдущие строки ($2 \leqslant k \leqslant n-1$). Получим

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & & & 0 \\ & -\lambda & 2\mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & n\mu \\ 0 & & & \lambda & -n\mu \end{pmatrix} \vec{p} = \vec{0}.$$

Таким образом,

$$-\lambda p_k + \mu(k+1)p_{k+1} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Следовательно, $p_{k+1} = \rho p_k/(k+1)$, где $\rho = \lambda/\mu$. Отсюда имеем $p_k = \dfrac{\rho^k}{k!}p_0$, а т. к. для решения выполняется условие $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$, то $p_0 = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \rho^k/k!\Big)^{-1}$ и окончательно

$$p_k^* = \frac{\rho^k/k!}{\sum\limits_{j=0}^{n} \rho^j/j!}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{9.30}$$

Формулы (9.30) называются *формулами Эрланга.*

Теперь мы объясним, как естественно возникает рассмотренная выше модель с переходными вероятностями, указанными на рис. 9.1.

Пусть имеется некоторая «*система массового обслуживания*» (СМО), состоящая из n одинаковых приборов. Пусть в эту систему поступает поток заявок на обслуживание. Будем считать, что заявки образуют пуассоновский поток, т. е. требования на обслуживание появляются в моменты ξ_1, $\xi_1+\xi_2, \dots$, где $\{\xi_k\}$ описывает пуассоновский процесс, см. рис. 8.2. В каждый из таких моментов поступает одно требование. Рассмотрим «*систему с отказами*», т. е. если все приборы заняты обслуживанием поступивших ранее заявок, то требование покидает систему («отказ»). Так бывает, например, когда телефонная линия занята. Если имеется свободный прибор, то поступившее требование мгновенно начинает обслуживаться (можно рассмотреть различные дисциплины обслуживания, мы этого не делаем для простоты и при этом считаем несущественным, на какой из свободных одинаковых приборов попадет на обслуживание заявка, каждый прибор обслуживает только одну заявку). Естественно считать, что состояние системы в момент t — это число X_t занятых приборов. Следует уточнить также характер обслуживания. Предположим, что время обслуживания каждого требования представляет собой экспоненциально распределенную величину η с параметром $\mu > 0$. Кроме того, пусть каждое требование обслуживается независимо от других и пусть случайные величины, описывающие длительности обслуживания, не зависят от последовательности $\{\xi_k\}$, задающей поток требований.

Обычно СМО обозначают $a|b|c$, где символ a указывает распределение величин ξ_k (по-прежнему, времена прихода заявок $\tau_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, где ξ_k, $k \in \mathbb{N}$ – н.о.р. величины), b обозначает распределение длительности обслуживания (все длительности – н.о.р. величины, не зависящие от $\{\xi_k\}$), c – количество приборов. При этом для экспоненциального распределения традиционно используется буква M. Таким образом, нами рассматривается система $M|M|n$. Запись $G|G|c$ указывала бы, что не делается специальных предположений об используемых распределениях ("G" – general). Возможны также дальнейшие обобщения, например, рассмотрение групповых заявок, когда в момент τ_k приходит не одно требование и т.д. (см., напр., [?]).

Если $\{\nu_t,\ t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс, построенный по $\{\xi_k\}$, и событие $A_m(t, t+h)$ — поступление на промежутке $(t, t+h]$ ровно m требований, то

$$P(A_m(t,t+h)) = P(\nu_{t+h} - \nu_t = m) = \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &P(A_0(t,t+h)) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \ \text{ при } \ h \to 0+;\\ &P(A_1(t,t+h)) = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h) \ \text{ при } \ h \to 0+;\\ &P\Big(\bigcup_{m \geqslant 2} A_m(t,t+h)\Big) = 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = o(h) \ \text{ при } \ h \to 0+. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Для времени обслуживания η плотность

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{9.32}$$

значит, для $x, y \geqslant 0$

$$P(\eta > x + y \mid \eta > y) = \frac{\int\limits_{x+y}^{\infty} p_\eta(z)\,dz}{\int\limits_{y}^{\infty} p_\eta(z)\,dz} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\eta > x). \tag{9.33}$$

Тем самым вероятность того, что работающий прибор проработает еще время x, не зависит от того, сколько этот прибор уже проработал (в классе распределений, обладающих плотностью, экспоненциальное распределение является единственным, удовлетворяющим условию (9.33)). Заметим, что

$$p_h = P(\eta < h) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h) \ \text{ при } \ h \to 0+.$$

Каждый прибор работает независимо от других. Поэтому вероятность того, что из k работающих в момент t приборов ровно l закончат эту работу за время h, есть $C_k^l p_h^l (1-p_h)^{k-l}$ (схема Бернулли). Следовательно, обозначив $B_{k,l}(t, t+h)$ событие «из k работающих приборов l закончат работу на промежутке времени $(t, t+h]$», получим

$$\begin{aligned} &P(B_{k,1}(t,t+h)) = k(1 - e^{-\mu h}) e^{-\mu h(k-1)} =\\ &\quad = k(\mu h + o(h))(1 - (k-1)\mu h + o(h)) = k\mu h + o(h), \quad h \to 0+;\\ &P\Big(\bigcup_{l \geqslant 2} B_{k,l}(t,t+h)\Big) = 1 - (1 - k\mu h) - k\mu h + o(h) = o(h), \quad h \to 0+. \end{aligned} \tag{9.34}$$

Событие $C_{ij}(t, t+h)$, состоящее в том, что система осуществила переход из состояния i в состояние j на промежутке $(t, t+h]$, можно представить в следующем виде (опуская в записи $(t, t+h]$). Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то

$$\begin{aligned} &C_{i,i+r} = A_r B_{i,0} \cup A_{r+1} B_{i,1} \cup \ldots \cup A_{r+i} B_{i,i} \ \text{ для } \ r = 1, \ldots, n-i,\\ &C_{i,i-r} = A_0 B_{i,r} \cup A_1 B_{i,r+1} \cup \ldots \cup A_{i-r} B_{i,i} \ \text{ для } \ r = 1, \ldots, i. \end{aligned}$$

Написав аналогичные выражения для $C_{0,k}$ и $C_{n,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, воспользуемся независимостью событий $\{A_q\}$ и $\{B_{m,k}\}$. Наконец, применив (9.31) и (9.34), приходим к формулам для $p_{ij}(h)$, содержащимся на рис. 9.1.

Марковский характер процесса $\{X_t,\ t \geqslant 0\}$ обусловлен тем, что развитие X_t после момента s определяется лишь значением X_s, процессом $\nu_t - \nu_s$ и семейством независимых экспоненциальных величин, описывающих длительности обслуживания. Подчеркнем, что **мы лишь описали естественный подход к модели, дающей формулы Эрланга,** более формальное построение процесса X_t и проверка его марковости в смысле какого-либо из эквивалентных определений требует дополнительных усилий. Здесь же заметим, что мы столкнулись с еще одной важной и сложной задачей: можно ли задавать марковский процесс с помощью инфинитезимальных характеристик (задавая матрицу Q и решая системы Колмогорова). Оказывается, ответ на этот вопрос совершенно нетривиален и связан со структурой траекторий марковского процесса.

В заключение этого раздела **еще раз обратимся к формулам** (9.30). Для $k = n$ величина p_n^* может интерпретироваться как вероятность потери требования в стационарном режиме, т. е. через большое время вероятность того, что все n приборов будут заняты, окажется близкой к p_n^* (следствие 8.7 показывает, что скорость сходимости $p_j(t)$ к p_j^* экспоненциально быстрая). Согласно [?], имеем следующие данные:

Таблица 9.2

$$n = 2, \quad \rho = 0{,}3, \quad p_2^* \simeq 0{,}0335.$$
$$n = 4, \quad \rho = 0{,}6, \quad p_4^* \simeq 0{,}0030.$$
$$n = 6, \quad \rho = 0{,}9, \quad p_6^* \simeq 0{,}0003.$$

Эта таблица показывает, что при увеличении нагрузки пропорциональное увеличение количества обслуживающих приборов может существенно уменьшить вероятность потери требования (в стационарном режиме). Название *коэффициент нагрузки* для ρ связано с тем, что для экспоненциально распределенной величины η (см. (9.32)) $\mathsf{E}\eta = 1/\mu$. Поэтому ρ есть отношение среднего времени обслуживания одного требования к среднему времени между приходом заявок.

Заметим также, что среднее число занятых приборов (в стационарном режиме) будет $\sum_{k=1}^{n} kp_k^* = \rho(1 - p_n^*)$.

Б. А. Севастьянов доказал, что **формулы Эрланга будут действовать** и в более общей ситуации, **когда среднее время обслуживания одного требования по-прежнему равно** $1/\mu$, но это время необязательно имеет экспоненциальное распределение.

Дополнения и упражнения.

Дадим наглядное представление о связи инфинитезимальной матрицы $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{X}}$ **с поведением самой (стандартной) марковской цепи** $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$. Пусть

$$q_i := -q_{ii} < \infty \quad \text{для всех } i \in \mathcal{X}. \tag{9.35}$$

Тогда (объясните) процесс X является стохастически непрерывным на всей полупрямой $[0, \infty)$ и, согласно теореме Д2.15, он имеет сепарабельную модификацию (с любым счетным множеством сепарабельности $R \subset [0, \infty)$), которую мы и будем рассматривать. Пусть в момент $s \geqslant 0$ процесс находится в состоянии i с вероятностью $P(X(s) = i) \neq 0$. Тогда для любого $t > 0$ (учитывая сепарабельность X) имеем

$$P(X(u) = i,\ s \leqslant u \leqslant s + t |\, X(s) = i) = \frac{1}{P(X(s) = i)} P(X(u) = i,\ s \leqslant u \leqslant s + t) =$$

$$\frac{1}{P(X(s)=i)}\lim_{n\to\infty} P(X(u)=i,\ \text{для } u=s+tk2^{-n},\ k=0,\dots,2^n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(p_{ii}(t2^{-n}))^{2^n}. \tag{9.36}$$

Из определения q_i получаем

$$(1-p_{ii}(h))/h=q_i+\alpha_i(h), \quad \text{где} \quad \alpha_i(h)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0+\,.$$

Следовательно, для фиксированных $t>0$, $i\in\mathcal{X}$ и всех $n\in\mathbb{N}$

$$(p_{ii}(t2^{-n}))^{2^n}=(1-q_it2^{-n}+o(t2^{-n}))^{2^n}=\exp\{2^n\log(1-q_it2^{-n}+o(t2^{-n}))\}.$$

Поскольку $\log(1+x)=x+\theta(x)x^2$, где $|\theta(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1/2$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty}(p_{ii}(t2^{-n}))^{2^n}=\exp\{-q_it\},\ t>0. \tag{9.37}$$

Очевидно, (9.36) и (9.37) выполняются и при $t=0$.

Левая часть (9.36) представляет собой вероятность пребывания процесса X в состоянии i в течение времени, не меньшего t, при условии, что в момент s процесс находился в состоянии i. Сопоставляя формулы (9.36) и (9.37), видим, что результат не зависит от s, что было естественно ожидать от однородного процесса. Поэтому можно говорить о длительности пребывания X в состоянии i, начиная с некоторого момента времени.

Итак, доказана (сравните с теоремой 8.5)

Теорема Д9.1. *Пусть однородная марковская цепь $X=\{X(t),\,t\geqslant 0\}$ удовлетворяет условию (9.35). Тогда длительность пребывания этого процесса в состоянии i имеет показательное распределение с параметром q_i (подразумевается условная вероятность, фигурирующая в (9.36)).*

Состояние i, для которого $0\leqslant q_i<\infty$, называется *устойчивым.* Оно называется *поглощающим*, когда $q_i=0$. Если процесс попадает в такое состояние, то он остается там навсегда (очевидно из формул (9.35) и (9.36) при $q_i=0$). Состояние i называется *мгновенным*, если $q_i=\infty$. Это название объясняет

Упр. 9.2. Пусть $q_i=\infty$. Докажите, что тогда вероятность пребывания X в этом состоянии равна нулю, т.е., попав в это состояние, процесс мгновенно его покидает.

Теория цепей Маркова, имеющих мгновенные состояния, чрезвычайно сложна. Интересно отметить, что в [?] построен пример однородной цепи, все состояния которой мгновенны.

Пусть теперь процесс консервативен, т.е. $q_i<\infty$ и $\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i$ для каждого $i\in\mathcal{X}$. Тогда **при $q_i\neq 0$ величины q_{ij}/q_i, $j\neq i$, можно интерпретировать, как интенсивности вероятностей переходов из состояния i в состояние j.** Точнее говоря, положим для $j\neq i$, $t>0$

$$F_{ij}(t):=P(X(s+t)=j|\,X(s)=i,\,X(s+t)\neq i).$$

Легко видеть, что

$$F_{ij}(t)=p_{ij}(t)/(1-p_{ii}(t))\to q_{ij}/q_i \quad \text{при} \quad t\to 0+\,. \tag{9.38}$$

Если $0 < q_i < \infty$ и $\sum_{j \neq i} q_{ij} < q_i$, то $1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}/q_i$ можно понимать как интенсивность вероятности "ухода процесса на бесконечность".

Данная выше интерпретация элементов матрицы Q делает естественным способ построения марковских цепей, предложенный Дубом.

Пусть $\mathcal{X}$ – конечное или счетное множество, и пусть марковская цепь $X = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ имеет консервативную инфинитезимальную матрицу Q с $q_i \in (0, \infty)$, $i \in \mathcal{X}$. Будем строить (реккурентным образом) на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ случайные величины η_n со значениями в $\mathcal{X}$ и случайные величины τ_n со значениями в $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Пусть η_1 имеет произвольное распределение, а для $t > 0$, $i \in \mathcal{X}$

$$P(\tau_1 > t \,|\, \eta_1 = i) = e^{-q_i t}, \tag{9.39}$$

и для $n \geqslant 1$, $i, j, i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{X}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} &P(\eta_{n+1} = j \,|\, \tau_1 = x_1, \ldots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \ldots, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \eta_n = i) = q_{ij}/q_i, \\ &P(\tau_{n+1} - \tau_n > t \,|\, \tau_1 = x_1, \ldots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \ldots, \eta_n = i_n, \eta_{n+1} = j) = e^{-q_j t}. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Упр. 9.3. Докажите, что на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существуют последовательности описанных выше величин η_n и τ_n, удовлетворяющие условиям (9.39) и (9.40). При этом $0 < \tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \ldots$ п.н. Можно ли утверждать, что всегда $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ п.н. при $n \to \infty$? Докажите, что последнее заведомо справедливо, если $\sup_i q_i < \infty$.

Упр. 9.4. Пусть $\tau_0(\omega) = 0$ п.н. Используя случайные величины η_n, τ_n, $n \in \mathbb{N}$, фигурирующие в упражнении 9.3, введем процесс $Y = \{Y(t),\ t \geqslant 0\}$, положив

$$Y(t, \omega) = \eta_n(\omega) \ \text{ при } \tau_{n-1}(\omega) \leqslant t < \tau_n(\omega),\ n \in \mathbb{N}$$

(для ω таких, что $\tau_{n-1}(\omega) = \tau_n(\omega)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, пусть $Y(t, \omega) = 0$, $t \geqslant 0$). Докажите, что Y – марковский процесс, имеющий те же к.-м.р., что и процесс X, который определял матрицу Q. Обдумайте, как модифицировать приведенное построение, если некоторые q_i равны нулю.

В связи с упражнением 9.3 заслуживает внимания

Упр. 9.5. Докажите, что $\sup_i q_i < \infty$ тогда и только тогда, когда $p_{ii}(t) \to 1$ при $t \to 0+$ равномерно по $i \in \mathcal{X}$ (или, что эквивалентно, $p_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ при $t \to 0+$ равномерно по $i, j \in \mathcal{X}$).

Упр. 9.6. Приведите пример переходных вероятностей, для которых не выполнено условие стандартности (9.1). Приведите пример, когда выполнено (9.1), а (9.35) не имеет места.

Итак, в упражнении 9.4 указано, как, располагая консервативной инфинитезимальной матрицей Q, построить сам марковский процесс, имеющий полугруппу переходных вероятностей с генератором Q. Другая постановка этой задачи (которая рассматривалась в дополнении к лекции 8) – это восстановление полугруппы $P(t)$, $t \geqslant 0$, по ее генератору. Если нам удастся построить стохастическую полугруппу $P(t)$, $t \geqslant 0$, имеющую инфинитезимальной матрицей заданную матрицу Q, то дальше теорема 8.1 обеспечит построение самого процесса с переходной матрицей $P(t)$ (даже семейства марковских процессов, т. к. мы можем варьировать начальное распределение).

Упр. 9.7. (ср. с теоремой Д9.10). Пусть пространство состояний $\mathcal{X}$ состоит из N элементов, а переходная функция (матрица) $P(t)$ стандартна. Докажите, что тогда

$$P(t) = \exp(tQ),\ t \geqslant 0, \tag{9.41}$$

где $N \times N$-матрица Q удовлетворяет условию

$$q_{ij} \geqslant 0 \quad \text{для } i \neq j \text{ и } \sum_j q_{ij} = 0 \quad \text{при каждом } i. \tag{9.42}$$

Обратно. Если для матрицы Q выполнено (9.42), то формула (9.41) определяет стандартную переходную функцию.

Теперь возьмем матрицу $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{X}}$ с действительными элементами такую, что

$$q_{ij} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad q_i = -q_{ii} \geqslant 0, \quad \text{и} \quad \sum_j q_{ij} \leqslant 0 \quad \text{для} \quad i \in \mathcal{X}. \tag{9.43}$$

Спрашивается, существует ли стохастическая полугруппа $\{P(t),\, t \geqslant 0\}$, для которой Q – инфинитезимальная матрица, т.е.

$$P'(0) = Q \tag{9.44}$$

(в нуле берется правая производная). В силу теоремы 9.2 и формулы (9.14) следует рассматривать лишь матрицы, для которых справедливо (9.41). Если существует переходная функция $P(t)$, удовлетворяющая (9.42), то консервативность Q влечет выполнение обратных уравнений Колмогорова, см. (9.16). Таким образом, **приходим к вопросу о существовании и единственности решений систем уравнений Колмогорова**. Это проблема исследовалась многими авторами с помощью разнообразной техники. Феллер [?] использовал преобразование Лапласа. Ледерман и Ройтер [?] применяли метод, основанный на приближениях матрицы Q "усеченными матрицами". Като [?] опирался на теорию возмущений.

Оказалось, что **искать решение задачи** (9.42) **удобно в классе полустохастических матриц** $P(t)$, $t \geqslant 0$, для которых по-прежнему выполнено (8.19), а в (8.20) вместо условия $\sum_j p_{ij}(t) = 1$, $t \geqslant 0$, $i \in \mathcal{X}$ налагается менее ограничительное требование $\sum_j p_{ij}(t) \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, $i \in \mathcal{X}$. Решение такой задачи часто называют *Q-процессом*, подразумевая следующее. Если получится, что $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ для всех $t \geqslant 0$, $i \in \mathcal{X}$, то говорят о *собственном решении* (или процессе), а если выполняется лишь неравенство $\sum_j p_{ij}(t) \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, $i \in \mathcal{X}$, то – о *несобственном процессе*. В первом случае действительно существует марковская цепь (разумеется, можно менять начальное распределение) с переходными вероятностями $p_{ij}(t)$, $t \geqslant 0$, $i, j \in \mathcal{X}$. Во втором же случае можно построить соответствующий марковский процесс, расширив пространство состояний точкой ∞. А именно, достаточно определить для $t \geqslant 0$

$$\widetilde{p}_{ij}(t) = p_{ij}(t) \quad \text{при} \quad i, j \in \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \widetilde{p}_{\infty,j}(t) = \delta_{\infty,j}, \; \widetilde{p}_{i,\infty}(t) = 1 - \sum_j p_{ij}(t). \tag{9.45}$$

Упр. 9.8. Докажите, что (9.45) позволяет определить марковский процесс на $[0, \infty)$ с пространством состояний $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$, имеющий переходную функцию $\widetilde{P}(t) = (\widetilde{p}_{ij}(t))_{i,j \in \widetilde{\mathcal{X}}}$, $t \geqslant 0$.

Интересно отметить, что сами уравнения (9.17) и (9.24) можно понимать либо в *узком смысле*: все $p'_{ij}(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$ и изучаемые уравнения справедливы при всех $t \geqslant 0$, либо в *широком смысле*: $p_{ij}(t)$ абсолютно непрерывны и рассматриваемые уравнения верны для почти всех (по мере Лебега) $t \geqslant 0$.

Упр. 9.9. Докажите, что для систем уравнений Колмогорова обе данные выше интерпретации (в узком и широком смыслах) эквивалентны. Для прямых уравнений – это сложная задача (см. [**?**]).

Теорема Д9.10. *Пусть выполнено условие* (9.41). *Тогда существует Q-процесс, удовлетворяющий как обратной, так и прямой системам Колмогорова.*

□ **Если пространство состояний конечно**, т.е. $\mathcal{X} = \{0,\dots,n\}$, то система обратных уравнений (9.16), т.е. система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет единственное решение

$$P(t) = e^{tQ},\ t \geqslant 0. \tag{9.46}$$

При этом выполнено (8.19) и $P(t)$ также удовлетворяет прямой системе (9.23).

Докажем, что (9.46) определяет полустохастические матрицы. Обозначим

$$\lambda = \min_{i\in\mathcal{X}} q_{ii},\ C(t) = e^{-\lambda t}P(t),\ t \geqslant 0.$$

Тогда

$$C'(t) = e^{-\lambda t}P'(t) - \lambda e^{-\lambda t}P(t) = e^{-\lambda t}P(t)Q - \lambda C(t) = C(t)Q - \lambda C(t) = C(t)B,$$

где $B = Q - \lambda I = (b_{ij})_{i,j=0}^{n}$. Поскольку

$$C(t) = e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B^k, \quad \text{где}\ \ b_{ij} = q_{ij} - \lambda\delta_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 0,\dots,n,$$

то $(C(t))_{ij} \geqslant 0$ и, следовательно, $p_{ij}(t) \geqslant 0$ для всех $i,j = 0,\dots,n$. Из (9.24) имеем

$$(\sum_j p_{ij}(t))' = \sum_j p'_{ij}(t) = \sum_j\sum_k p_{ik}(t)q_{kj} = \sum_k p_{ik}(t)\sum_j q_{kj} \leqslant 0.$$

Следовательно, $\sum_j p_{ij}(t) \leqslant \sum_j p_{ij}(0) = 1$.

Рассмотрим теперь счетное $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$. Обратимся к обратным "усеченным уравнениям" Колмогорова

$$P'_n(t) = Q_nP_n(t),\ P_n(0) = I_n,$$

где $P_n(t) = ((P_n(t))_{ij})$, $Q_n = (q_{ij})$, $I_n = (\delta_{ij})$, $i,j = 0,\dots,n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По доказанному выше

$$P_n(t) = e^{tQ_n},\ t \geqslant 0. \tag{9.47}$$

Далее каждую конечную матрицу вида $A_n = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ доопределим (сохранив обозначения) до бесконечной $A_n = (a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, положив $a_{ij} = 0$ при $i > n$ или $j > n$.

Теперь **докажем, что при каждом** $t \geqslant 0$

$$\exists \lim_{n\to\infty} P_n(t) = P(t), \tag{9.48}$$

(т.е. существует предел у каждого элемента матрицы $P_n(t)$) **и этот предел дает искомую матричную функцию**.

Для $i,j \in \mathcal{X}$, $n \geqslant \max\{i,j\}$ и $t \geqslant 0$ имеем

$$(P_{n+1}(t))'_{ij} = \sum_{k=0}^{n+1}(P_{n+1}(t))_{ik}q_{kj} = \sum_{k=0}^{n}(P_{n+1}(t))_{ik}q_{kj} + (P_{n+1}(t))_{i,n+1}q_{n+1,j},$$

или в матричном виде

$$C'(t) = C(t)Q_n + D(t),$$

где $C(t) = ((P_{n+1}(t))_{ij})_{i,j=0}^n$, $D(t) = ((P_{n+1}(t))_{i,n+1}q_{n+1,j})_{i,j=0}^n$. Мы знаем, что $P_n(t) = e^{tQ_n}$ является решением уравнения $C'(t) = C(t)Q_n$. Поэтому, учитывая, что $C(0) = I_n$, методом вариации постоянной получаем

$$C(t) = P_n(t) + \int_0^t P_n(t-s)D(s)ds, \ t \geqslant 0. \tag{9.49}$$

Из (9.49), принимая во внимание, что матрицы $P_n(u)$ и $D(s)$ имеют неотрицательные элементы при $u, s \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, выводим, что

$$(P_{n+1}(t))_{ij} \geqslant (P_n(t))_{ij} \ \text{ при любых } i,j \in \mathcal{X} \ \text{ и } n \geqslant \max\{i,j\}. \tag{9.50}$$

Кроме того, в силу доказанной полустохастичности матриц $P_n(t)$, $t \geqslant 0$,

$$(P_n(t))_{ij} \leqslant \sum_j (P_n(t))_{ij} \leqslant 1, \ i,j \in \mathcal{X}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.51}$$

Поскольку **неубывающая ограниченная последовательность имеет** (конечный) **предел**, видим, что (9.48) **доказано**.

Нам понадобится элементарная

Лемма Д9.11. *Пусть $a_k(n) \nearrow a_k < \infty$ при $n \to \infty$ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $a_k(n) \leqslant a_k(n+1)$ для всех $k,n \in \mathbb{Z}_+$ и $\lim_{n\to\infty} a_k(n) = a_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$). Тогда*

$$\sum_k a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_k a_k(n). \tag{9.52}$$

Из этой леммы, с учетом (9.50) и (9.51) следует, что $P(t)$ – **полустохастические матрицы при каждом** $t \geqslant 0$.

Кроме того, поскольку для всех $s, t \geqslant 0$ и $i, j, n \in \mathbb{Z}_+$

$$(P_n(s+t))_{ij} = \sum_k (P_n(s))_{ik}(P_n(t))_{kj},$$

то, полагая $a_k(n) = (P_n(s))_{ik}(P_n(t))_{kj}$ (для произвольных фиксированных $s \geqslant 0$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$), в силу леммы Д9.10 заключаем, что **матрицы** $P(t)$, $t \geqslant 0$ **образуют полугруппу**, т.е. справедливо (8.19).

Докажем теперь, что $P(t)$, $t \geqslant 0$ **удовлетворяет обратному и прямому уравнениям Колмогорова**, которые в интегральной форме запишутся соответственно как

$$P(t) = I + \int_0^t QP(s)ds, \tag{9.53}$$

$$P(t) = I + \int_0^t P(s)Qds. \tag{9.54}$$

Достаточно убедиться лишь в справедливости (9.51), т.к.

$$QP(s) = P(s)Q, \ s \geqslant 0. \tag{9.55}$$

Действительно, для произвольных (фиксированных) $i, j \in \mathcal{X}$ и $s \geqslant 0$

$$(Q_n P_n(s))_{ij} = q_{ii}(P_n(s))_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n),$$

где $a_k(n) = q_{ik}(P_n(s))_{kj}(1 - \delta_{ik})$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь леммой Д9.10, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n P_n(s) = QP(s)$. Аналогично убеждаемся, что $P_n(s)Q_n \to P(s)Q$ при $n \to \infty$. Остается учесть, что

$$Q_n P_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k Q_n^{k+1}}{k!} = P_n(s)Q_n, \; n \in \mathbb{Z}_+, \; s \geqslant 0.$$

Для "усеченных (обратных) уравнений" имеем

$$P_n(t) = I + \int_0^t Q_n P_n(s) ds,$$

т.е. для $i, j \in \mathcal{X}$, $t \geqslant 0$

$$(P_n(t))_{ij} = \delta_{ij} + q_{ii} \int_0^t (P_n(s))_{ij} ds + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}(P_n(s))_{kj}(1 - \delta_{ik}) ds.$$

Совершив предельный переход при $n \to \infty$ в силу теоремы Б. Леви приходим к (9.53). $\square$

Теорема Д9.12. *Пусть матрица* Q*, состоящая из действительных чисел, удовлетворяет условию* (9.41)*. Тогда обратное уравнение Колмогорова* (9.16) *имеет в классе полустохастических матриц единственное решение, являющееся собственным* Q*-процессом, тогда и только тогда, когда то же самое верно для прямого уравнения* (9.23).

$\square$ Случай конечного $\mathcal{X}$ тривиален, поэтому пусть далее $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$. Прежде всего докажем, что **решение** $(P(t), t \geqslant 0)$**, построенное при доказательстве теоремы Д9.10, обладает свойством минимальности**, т.е. если $(\widetilde{P}(t), t \geqslant 0)$ – какое-либо решение уравнения (9.16), т.е.

$$\widetilde{P}'(t) = Q\widetilde{P}(t), \; t \geqslant 0, \; \widetilde{P}(0) = I,$$

то

$$(\widetilde{P}(t))_{ij} \geqslant (P(t))_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j \in \mathcal{X} \text{ и } \; t \geqslant 0. \tag{9.56}$$

Фиксируем $j \in \mathcal{X}$ и положим $(x(t))_i = (\widetilde{P}(t))_{ij}$, $(x(0))_i = \delta_{ij}$, $i \in \mathcal{X}$. Тогда для $i \in \mathcal{X}$, $t \geqslant 0$

$$(x(t))_i' = \sum_{k=0}^{n} q_{ik}(x(t))_k + \sum_{k>n} q_{ik}(x(t))_k,$$

т.е.

$$x_n'(t) = Q_n x_n(t) + R_n(t),$$

где вектор-столбец $x_n(t) = ((x(t))_0, \ldots, (x(t))_n)$ и $(R_n(t))_i = \sum_{k>n} q_{ik}(x(t))_k$, $i = 0, \ldots, n$. Аналогично (9.49) имеем

$$x_n(t) = P_n(t) + \int_0^t P_n(t-s) R_n(s) ds, \; n \in \mathbb{Z}_+, \; t \geqslant 0,$$

т.е. для $i \leqslant n$, $j \leqslant n$

$$(x_n(t))_i = (P_n(t))_{ij} + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} (P_n(t-s))_{ik} (R_n(s))_k ds.$$

Учитывая, что $(P_n(u))_{ik} \geqslant 0$, $(R_n(s))_k \geqslant 0$ для $i, k = 0, \dots, n$ и $s, u \geqslant 0$, приходим к (9.56).

Пусть решение обратной системы Колмогорова является единственным в классе полустохастических матриц и собственным. Тогда по доказанному оно представляет собой минимальное решение $(P(t),\, t \geqslant 0)$ прямых и обратных уравнений Колмогорова. Если $(\widetilde{P}(t),\, t \geqslant 0)$ – какое-либо решение прямых уравнений в классе полустохастических матриц, то $\sum_j \widetilde{p}_{ij}(t) \leqslant 1$ для $i \in \mathcal{X}$. Из (9.56) и условия $\sum_j p_{ij}(t) = 1$, $i \in \mathcal{X}$, заключаем, что $\widetilde{p}_{ij}(t) = p_{ij}(t)$ при всех $i, j \in \mathcal{X}$, $t \geqslant 0$. Аналогичные рассуждения справедливы, если предположить, что имеется единственное (в классе полустохастических матриц) решение прямой системы уравнений Колмогорова, являющееся собственным. □

Упр. 9.13. Пусть Q удовлетворяет (9.41) и консервативна. Докажите, что если минимальный процесс (см. доказательство теоремы Д9.11) $(P(t),\, t \geqslant 0)$ собственный, то он является единственным Q-процессом. Если $(P(t),\, t \geqslant 0)$ – несобственный, то существует бесконечно много Q-процессов, среди которых бесконечно много собственных.

Упр. 9.14. (сравните с теоремой Д8.29). Пусть Q удовлетворяет (9.41) и консервативна. Тогда любое из следующих двух условий необходимо и достаточно для существования единственного Q-процесса.

1. Для некоторого $\lambda > 0$ единственным ограниченным решением уравнения
$$(Q - \lambda I)x = 0 \tag{9.57}$$
является $x = 0$, т.е. $x = (0, 0 \dots)$, а ограниченность решения означает, что $\sup_i |x_i| < \infty$.

2. Для некоторого $\lambda > 0$ единственным неотрицательным ограниченным решением уравнения (9.57) является $x = 0$.

Упр. 9.15. (см. упражнение 9.5). Докажите, что если $\sup_i q_i < \infty$, то обе системы уравнений Колмогорова имеют единственное решение.

Интересно отметить, что **проблема существования и единственности решения уравнений Колмогорова тесно связана со свойствами траекторий марковской цепи**, как показывает

Теорема Д9.16 (см. [?]). *Пусть все $q_i < \infty$. Тогда для того, чтобы были справедливы и система прямых и система обратных уравнений Колмогорова, необходимо и достаточно, чтобы почти все траектории обладали следующим свойством: если $X(s, \omega) \to \infty$ при $s \to t$ с одной стороны, то $X(s, \omega) \to \infty$ при $s \to t$ с обеих сторон.*

Единственность и неединственность решений уравнений Колмогорова удобно рассмотреть на примерах процессов рождения и гибели. Однородный марковский процесс $(X(t),\, t \geqslant 0)$ с пространством состояний $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$ называется *процессом рождения и гибели*, если его инфинитезимальная матрица Q имеет вид

$$q_{i,i-1} = \mu_i,\ q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i),\ q_{i,i+1} = \lambda_i,\ q_{ij} = 0 \ \text{ при } |i - j| > 1, \tag{9.58}$$

где $\mu_0 = 0$, $\mu_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$ и $\lambda_i > 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Если $\mu_i = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, то говорят о *процессе рождения*, а если $\lambda_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то – о *процессе гибели.*

Упр. 9.17. Пусть процесс рождения таков, что $\sum_i \lambda_i^{-1} < \infty$. Докажите, что тогда система прямых уравнений Колмогорова имеет единственное решение, а система обратных – бесконечно много.

Упр. 9.18. Докажите, что если процесс гибели таков, что $\sum_i \mu_i^{-1} < \infty$, то система обратных уравнений имеет единственное решение, а система прямых – бесконечно много, среди которых ровно одно собственное.

Чтобы сформулировать общий результат о процессах рождения и гибели, введем некоторые обозначения. Положим

$$\pi_0 = 1,\ \pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n},\ n \in \mathbb{N}, \tag{9.59}$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\pi_n}\sum_{i=1}^{n}\pi_i,\ S = \sum_{n=2}^{\infty}\pi_n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i\pi_i},\ T = \sum_{n=0}^{\infty}(\pi_n + \frac{1}{\lambda_n\pi_n}).$$

Теорема Д9.19 (Ройтер). *Пусть Q – консервативная матрица, удовлетворяющая условию* (9.43). *Тогда*

1. *Если $R = \infty$, то существует ровно один Q-процесс, он собственный и удовлетворяет системе прямых уравнений.*

2. *Если $R < \infty$ и $S = \infty$, то существует бесконечно много Q-процессов. Только один из них удовлетворяет системе прямых уравнений, но этот процесс несобственный.*

3. *Если $R < \infty$ и $S < \infty$, что эквивалентно условию $T < \infty$, то существует бесконечно много Q-процессов, удовлетворяющих системе прямых уравнений. Ровно один из этих процессов является собственным.*

Отметим, что критерий $R = \infty$ единственности Q-процесса был получен Добрушиным [?].

Для марковских цепей **важным представляется вопрос о классификации состояний** (возвратные, периодические состояния и т.д.). Для цепей Маркова с дискретным временем об этом можно прочитать, например, в книгах [?], [?], [?]. Если $P(X(0) = i) \neq 0$, то для $t > 0$ определим

$$G_{ii}(t) := P(X(t_1) \neq i,\, X(t_2) = i \ \text{ для некоторых } 0 < t_1 < t_2 \leqslant t \,|\, X(0) = i),$$

т.е. это условная вероятность того, что, оказавшись в начальный момент в состоянии i, процесс (побывав в другом состоянии) вновь окажется в этом состоянии до момента t. Состояние i называется *возвратным*, если $\lim_{t\to\infty} G_{ii}(t) = 1$, и *невозвратным* в противном случае. Состояние i называют *эргодическим* или *нулевым возвратным* в зависимости от того, будет ли конечно или бесконечно среднее время возвращения $\int_0^\infty t dG_{ii}(t)$.

Упр. 9.20. Докажите, что для процесса рождения и гибели справедливы следующие утверждения.

1. Либо все состояния возвратны, либо все невозвратны.

2. Процесс возвратен (все состояния возвратны) тогда и только тогда, когда

$$\sum_n (\lambda_n \pi_n)^{-1} = \infty.$$

3. Процесс невозвратен (все состояния невозвратны) тогда и только тогда, когда

$$\sum_n \pi_n = \infty \quad \text{и} \quad \sum_n (\lambda_n \pi_n)^{-1} < \infty.$$

π_n определены в (9.57).

Упр. 9.21. Докажите, что процесс рождения и гибели является эргодическим тогда и только тогда, когда

$$\sum_n \pi_n < \infty \quad \text{и} \quad \sum_n (\lambda_n \pi_n)^{-1} = \infty,$$

а нулевым возвратным – тогда и только тогда, когда

$$\sum_n \pi_n = \infty \quad \text{и} \quad \sum_n (\lambda_n \pi_n)^{-1} = \infty.$$

Лекция 10. Интеграл по ортогональной случайной мере.

Понятие о канонических представлениях случайных функций. Ортогональные случайные меры и их σ-конечные структурные меры. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере.

Общая идея замены изучения сложных объектов их более простыми (аппроксимирующими) **моделями находит свое выражение в построении канонических разложений случайных функций**. Поясним это простым примером. Допустим комплекснозначный L^2-процесс $X = \{X(t),\ t \in [a, b]\}$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, удалось представить в виде

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k(t) z_k, \tag{10.1}$$

где $m(t) = \mathsf{E}X(t)$, функции $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ неслучайны, а $z_1, \dots, z_n$ – центрированные случайные величины из $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда вместо континуума случайных величин $X(t),\ t \in [a, b]$, мы имели бы конечные наборы случайных величин и детерминированных функций. Подсчет многих характеристик исходного процесса X при этом упрощается. Так, ковариационная функция

$$r(s, t) = \operatorname{cov}(X(t), X(s)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(s) \overline{\phi_k(t)},\ \ s, t \in [a, b],$$

где λ_k – это дисперсия величины z_k, $k = 1, \dots, n$.

Аналогичные соображения играют роль и при получении разложений типа (10.1), где вместо конечной суммы возникает ряд, сходящийся в должном смысле. Напомним, что пример разложения такого рода содержит теорема 3.6.

Понятно, что если $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – сепарабельно, то можно взять не более чем счетный базис ортонормированных элементов $z_1, z_2, \dots$, и представить $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в виде суммы ряда Фурье с коэффициентами $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$. Однако тогда, вообще говоря, свойства этих коэффициентов будут не очень "хорошими". Оказывается тем не менее, что во многих случаях удается "хорошо" выбрать не только $z_1, z_2, \dots$, но и функции $\phi_1, \phi_2, \dots$ (например, со свойством ортогональности в $L^2[a, b]$). Более того, нетривиальные обобщения (10.1) получаются при переходе от сумм к интегралам. Фундамент теории таких канонических разложений случайных процессов был заложен в трудах К. Карунена и В. С. Пугачева.

Для канонических представлений случайных функций нам понадобится новое **понятие интегрирования по ортогональной случайной мере**.

Пусть $\mathcal{K}$ — полукольцо подмножеств некоторого множества Λ. Пусть на $\mathcal{K}$ задана σ-конечная мера μ. Меру μ можно однозначно продолжить на σ-алгебру $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$ (с единицей Λ), при этом совокупность множеств $\mathfrak{M} = \{B \in \mathcal{A}\colon\ \mu(B) < \infty\}$ есть δ-кольцо.

Пусть каждому $B \in \mathcal{K}$ сопоставлена комплекснозначная величина $Z(B) \in L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т. е. $Z(B) = Z(B, \omega)$ и $\mathsf{E}|Z(B)|^2 < \infty$, причем пусть

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C) \quad \forall\, B, C \in \mathcal{K}, \tag{10.2}$$

где $(\xi, \zeta) = \mathsf{E}\xi\bar{\zeta}$ для $\xi, \zeta \in L^2(\Omega)$. Тогда $Z(\cdot)$ называется *ортогональной случайной мерой* со *структурной мерой* μ.

Из (10.2) видно, что если $B, C \in \mathcal{K}$ и $B \cap C = \varnothing$, то $Z(B) \perp Z(C)$, т. е. $(Z(B), Z(C)) = \mu(\varnothing) = 0$.

Итак, слово ортогональность в названии Z оправдано, покажем, что Z обладает и свойствами меры.

Теорема 10.1. *Ортогональная случайная мера Z является счетно-аддитивной в $L^2(\Omega)$ функцией на $\mathcal{K}$, т. е. если $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B, B_1, \ldots \in \mathcal{K}$, причем $B_n \cap B_m = \varnothing$ для $n \neq m$, то*

$$Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k), \tag{10.3}$$

здесь ряд сходится в среднем квадратичном.

□ В силу (10.2) и билинейности скалярного произведения (точнее, "полуторалинейности", т.к. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ и $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ для $x, y \in L^2(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$) имеем

$$\|Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\|^2 = (Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k), Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)) =$$
$$= \mu(B) - \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \to 0,\ n \to \infty. \ \square$$

Заметим, что $Z(\varnothing) = 0$ п.н., поэтому из (10.3) вытекает, что Z есть п.н. конечно-аддитивная функция на $\mathcal{K}$. Подчеркнем также, что **множество тех** $\omega \in \Omega$, **для которых выполнено** (10.3), **хотя и имеет вероятность 1, но зависит от рассматриваемых** $B, B_1, \ldots \in \mathcal{K}$.

Пример 10.2. Пусть $\Lambda = [0, \infty)$, $\mathcal{K} = \{[a, b),\ 0 \leqslant a \leqslant b < \infty\}$ $([a, a) = \varnothing)$. Положим $Z([a, b)) = W(b) - W(a)$, где W — винеровский процесс. Учитывая независимость приращений винеровского процесса, видим, что Z — ортогональная случайная мера на $\mathcal{K}$, имеющая структурной мерой μ меру Лебега.

Теперь наши усилия будут направлены на **продолжение** Z **с** $\mathcal{K}$ **на** $\mathfrak{M}$.

Если μ — σ-конечная мера на $\mathcal{K}$, то существуют $\Lambda_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, причем $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \varnothing$ для $n \neq m$ и $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ (если μ – конечная мера, то $\Lambda = \Lambda_1$). Обозначим $\mathcal{K}_n = \mathcal{K} \cap \Lambda_n$, т. е. $\mathcal{K}_n = \{B \in \mathcal{K}\colon\ B \subset \Lambda_n\}$, и рассмотрим $\mathcal{A}_n = \sigma\{\mathcal{K}_n\}$ — σ-алгебру с единицей Λ_n. Тогда

$$A \in \mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\} \Longleftrightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{где} \ \ A_n \in \mathcal{A}_n, \tag{10.4}$$

при этом

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n), \tag{10.5}$$

где μ_n — лебегово продолжение меры $\mu|_{\mathcal{K}_n}$ с полукольца $\mathcal{K}_n$ на $\mathcal{A}_n$. Нетрудно показать, что $\mathcal{A}$ не зависит от выбора разбиения Λ на $\Lambda_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, и при этом правая часть формулы (10.5) будет давать одно и то же значение для разных разбиений.

Будем считать вначале, что $\mu(\Lambda) < \infty$ (т. е. рассмотрим отдельную «клетку» разбиения Λ на Λ_n, $n \in \mathbb{N}$).

Обозначим $\mathfrak{A}$ алгебру, состоящую из конечных объединений непересекающихся множеств, входящих в $\mathcal{K}$ ($\Lambda \in \mathcal{K}$). Для $B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, где $B_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, \dots, m$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ ($i \neq j$), **положим**

$$Z(B) = \sum_{i=1}^{m} Z(B_i). \tag{10.6}$$

Это **определение корректно**. Действительно, пусть $B = \bigcup\limits_{j=1}^{r} D_j$, $D_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \dots, r$, $D_j \cap D_l = \varnothing$ ($j \neq l$). Тогда в силу (10.3) получим $\sum\limits_{i=1}^{m} Z(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{r} Z(B_i \cap D_j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{r} Z(D_j) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{i=1}^{m} Z(D_j \cap B_i)$, **всюду равенство случайных величин есть равенство п.н.**

Назовем функцию $f\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ *простой*, если

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{B_i}, \tag{10.7}$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \dots, m$, причем $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = \Lambda$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$, т. е. множества B_i образуют разбиение Λ.

Определим для простой функции (10.7) *интеграл по ортогональной случайной мере* формулой

$$Jf = \sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i). \tag{10.8}$$

Лемма 10.3. *Определение* (10.8) *корректно.*

□ Пусть наряду с (10.7) функцию f можно представить в виде $f = \sum\limits_{j=1}^{r} d_j \mathbb{1}_{D_j}$, где $d_j \in \mathbb{C}$, $D_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \dots, r$; $\bigcup\limits_{j=1}^{r} D_j = \Lambda$, $D_i \cap D_j = \varnothing$ ($i \neq j$). Но тогда, если $\mu(B_i \cap D_j) \neq 0$, то $c_i = d_j$. Следовательно, учитывая, что $Z(\varnothing) = 0$, имеем

$$\sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j) = \sum_{j=1}^{r} d_j \sum_{i=1}^{m} Z(D_j \cap B_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\colon\ \mu(B_i \cap D_j) \neq 0} d_j Z(B_i \cap D_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\colon\ \mu(B_i \cap D_j) \neq 0} c_i Z(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} c_i Z(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i). \ \square \tag{10.9}$$

Лемма 10.4. *Пусть f и g — простые функции. Тогда*

$$(Jf, Jg) = \langle f, g \rangle$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$.

□ Пусть f задается формулой (10.7), а $g = \sum\limits_{j=1}^{r} d_j \mathbb{1}_{D_j}$, где $D_1, \ldots, D_r$ образуют разбиение Λ. Тогда

$$\begin{aligned}(Jf, Jg) &= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i), \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \mu(B_i \cap D_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \int\limits_{\Lambda} \mathbb{1}_{B_i \cap D_j}(\lambda)\mu(d\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \int\limits_{\Lambda} \mathbb{1}_{B_i}(\lambda)\mathbb{1}_{D_j}(\lambda)\mu(d\lambda) = \\ &= \int\limits_{\Lambda} \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{B_i} \overline{\sum_{j=1}^{r} d_j \mathbb{1}_{D_j}} \mu(d\lambda) = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\mu(d\lambda) = \langle f, g\rangle. \ \square\end{aligned}$$

Следствие 10.5. *J — линейное отображение линейного многообразия простых функций в $L^2(\Omega)$.*

□ Если f и g — простые функции, то, очевидно, $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, — тоже простая функция. В силу билинейности скалярного произведения и леммы 10.4

$$\begin{aligned}&(J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g),\ J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g)) = \\ &\quad = \langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g\rangle - \alpha\langle f, \alpha f + \beta g\rangle - \beta\langle g, \alpha f + \beta g\rangle - \\ &\quad - \bar{\alpha}\langle \alpha f + \beta g, f\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle f, f\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle g, f\rangle - \bar{\beta}\langle \alpha f + \beta g, g\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle f, g\rangle + \beta\bar{\beta}\langle g, g\rangle = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J f + \beta J g. \ \square \tag{10.10}$$

Лемма 10.6. *Простые функции плотны в $L^2(\Lambda)$.*

□ Пусть $f \in L^2(\Lambda)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $H = H(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{\Lambda} f^2(\lambda)\mathbb{1}_{\{|f(\lambda)| \geqslant H\}}\mu(d\lambda) < \varepsilon.$$

Теперь в соответствии с (7.3) аппроксимируем $f(\lambda)\mathbb{1}_{\{|f(\lambda)|<H\}}$ последовательностью ступенчатых функций $h_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k}\mathbb{1}_{D_{n,k}}$, где $D_{n,k} = \{\lambda\colon\ r_{n,k} < f(\lambda) \leqslant r_{n,k} + H2^{-n+1}\} \in \mathcal{A}$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. При этом

$$\sup_{\lambda} |f(\lambda)\mathbb{1}_{\{|f(\lambda)|<H\}} - h_n(\lambda)| \leqslant H2^{-n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а следовательно,

$$\| f\mathbb{1}_{\{|f|<H\}} - h_n \| \leqslant H2^{-n+1}(\mu(\Lambda))^{1/2},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\Lambda)$. По лемме 4.2 (справедливой для любых конечных мер) находим $B_{n,k} \in \mathfrak{A}$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, такие что для этих k и n

$$\mu(D_{n,k} \triangle B_{n,k}) < \varepsilon H^{-1}2^{-n-1}.$$

Тогда

$$\left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k}\mathbb{1}_{D_{n,k}} - \sum_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k}\mathbb{1}_{B_{n,k}} \right\| \leqslant H \sum_{k=0}^{2^n-1} \| \mathbb{1}_{D_{n,k}} - \mathbb{1}_{B_{n,k}} \| = H \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu(D_{n,k} \triangle B_{n,k}) < \varepsilon.$$

Осталось представить $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_{n,k}\mathbb{1}_{B_{n,k}}$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{m_n} c_i\mathbb{1}_{B_i}$, где $B_1, \dots, B_{m_n} \in \mathfrak{A}$ и образуют разбиение Λ, что тривиально. $\square$

Теперь мы можем по непрерывности распространить J на $L^2(\Lambda)$. Для любой функции $f \in L^2(\Lambda)$ **положим**

$$Jf = \lim_{n\to\infty} Jf_n \quad (\text{предел в } L^2(\Omega)), \tag{10.11}$$

где $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, таких что $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ при $n \to \infty$.

Лемма 10.7. *Определение* (10.11) *корректно.*

$\square$ По лемме 10.6 существует последовательность простых функций $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ при $n \to \infty$. Пользуясь следствием 10.5 и леммой 10.4, имеем

$$\|Jf_n - Jf_m\| = \|J(f_n - f_m)\| = |\!|f_n - f_m|\!| \to 0$$

при $n, m \to \infty$, т. к. сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной. Поскольку $L^2(\Omega)$ полно, получаем, что существует предел Jf_n в $L^2(\Omega)$. Покажем, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций. Пусть $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$, где g_n простые. Тогда $|\!|g_n - f_n|\!| \leqslant |\!|g_n - f|\!| + |\!|f_n - f|\!| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|Jf_n - Jg_n\| = \|J(f_n - g_n)\| = |\!|f_n - g_n|\!| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Но если $Jf_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} \xi$ и $Jg_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} \zeta$, то $Jf_n - Jg_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} \xi - \zeta$. Таким образом, $\|Jf_n - Jg_n\| \to \|\xi - \zeta\| = 0$, т. е. $\xi = \zeta$ п.н. $\square$

Следствие 10.8. *Для любых* $f, g \in L^2(\Lambda)$

$$(Jf, Jg) = \langle f, g\rangle \tag{10.12}$$

и J *— линейное отображение* $L^2(\Lambda)$ *в* $L^2(\Omega)$. *Пусть* $h_n \in L^2(\Lambda)$ *(необязательно простые) и* $h_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$. *Тогда*

$$Jh_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} Jf, \quad n \to \infty. \tag{10.13}$$

$\square$ Для доказательства (10.12) достаточно взять простые функции f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$, такие что $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$, $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} g$ (см. лемму 10.6), воспользоваться леммой 10.4 и учесть непрерывность скалярного произведения. Линейность J устанавливается так же, как при доказательстве следствия 10.5. Пользуясь линейностью J и (10.12), имеем

$$\|Jf - Jh_n\| = \|J(f - h_n)\| = |\!|f - h_n|\!| \to 0, \quad n \to \infty. \ \square$$

Обратимся теперь к построению Jf для $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$, где μ — σ-конечная мера.

Рассмотрим разбиение Λ на $\Lambda_n \in \mathcal{K}$ с $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \iff \begin{array}{l} f_n := f|_{\Lambda_n} \in L^2(\Lambda_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \\ \displaystyle\int_\Lambda f^2(\lambda)\mu(d\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Lambda_n} f_n^2(\lambda)\mu_n(d\lambda) < \infty, \end{array} \tag{10.14}$$

где $\mathcal{A}_n = \sigma\{\mathcal{K} \cap \Lambda_n\}$, μ_n — лебегово продолжение меры $\mu|_{\mathcal{K}_n}$ с $\mathcal{K}_n$ на $\mathcal{A}_n$. При этом значение интеграла в левой части (10.14) не зависит от выбора разбиения Λ на Λ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Для $f \in L^2(\Lambda)$ **положим**

$$Jf = \sum_{n=1}^{\infty} J_n f_n, \tag{10.15}$$

где ряд сходится в $L^2(\Omega)$, функции f_n фигурируют в (10.14), отображения J_n определены на $L^2(\Lambda_n)$ описанным выше способом.

Лемма 10.9. *Определение* (10.15) *корректно.*

$\square$ Если $f \in L^2(\Lambda)$, то согласно (10.14) имеем $f_n \in L^2(\Lambda_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что $J_n f_n \perp J_m f_m$ при $n \neq m$. Если f_n и f_m — простые функции, то это очевидно, т. к. $(Z(B), Z(D)) = 0$ для $B \in \mathfrak{A}_n$ и $D \in \mathfrak{A}_m$ ($\mathfrak{A}_n$ — алгебра, порожденная $\mathcal{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$). Для f_n и f_m, не являющихся простыми, надо взять аппроксимации простыми функциями. Следовательно,

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} J_n f_n - \sum_{n=1}^{N} J_n f_n \right\|^2 = \sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N} \|J_n f_n\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad N, M \to \infty$$

в силу изометричности J_n и сходимости ряда в правой части (10.14).

Теперь покажем, что величина Jf не зависит от вида разбиения Λ. Пусть $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, $\Gamma_n \in \mathcal{K}$, $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \varnothing$ $(n \neq m)$, $\mu(\Gamma_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $h_{n,m} = f|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_n = f|_{\Lambda_n} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} f|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что $\sum_{m=1}^{N} h_{n,m} \xrightarrow{L^2(\Lambda_n)} f_n$ при $N \to \infty$ и, значит, в силу (10.13)

$$J_n f_n = \sum_{m=1}^{\infty} J_n h_{n,m},$$

где ряд сходится в $L^2(\Omega)$. По построению $J_{n,m}$ для $h \in L^2(\Lambda_n \cap \Gamma_m) \subset L^2(\Lambda_n)$ имеем $J_{n,m} h = J_n h$, $n, m \in \mathbb{N}$. Учитывая, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_{n,m} h_{n,m}.$$

Аналогично, обозначив $g_m = f|_{\Gamma_m}$ и $\widetilde{J}_m$ – отображение, которое строится на $L^2(\Gamma_m)$ так же, как J_n на $L^2(\Lambda_n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{J}_m g_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n,m} h_{n,m}. \tag{10.16}$$

Остается учесть, что $J_{n,m} h_{n,m} \perp J_{k,l} h_{k,l}$, если $(n,m) \neq (k,l)$, и то, что данные ряды из ортогональных величин можно суммировать в любом порядке, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|J_{n,m} h_{n,m}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|h_{n,m}\|^2_{L^2(\Lambda_n \cap \Gamma_m)} = \int_{\Lambda} f^2(\lambda) \mu(d\lambda) < \infty. \ \square$$

Как правило, для записи действия J на $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ используется обозначение

$$Jf = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda) Z(d\lambda). \tag{10.17}$$

Теорема 10.10. *Стохастический интеграл* (10.17) *является изометрическим отображением* $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ (*где* μ — σ-*конечная мера*) *на подпространство* $L_Z^2 \subset \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *При этом* Z *продолжается до ортогональной меры на* δ-*кольце* $\mathfrak{M} = \{B \in \mathcal{A}\colon\ \mu(B) < \infty\}$ *со структурной мерой* μ *по формуле*

$$Z(B) = J\mathbb{1}_B. \tag{10.18}$$

□ Требуется рассмотреть лишь случай бесконечной меры μ. Пусть $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, где $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — разбиение Λ и $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $f, g \in L^2(\Lambda)$. Тогда $f \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $g \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$, где $f_n = f|_{\Lambda_n}$, $g_n = g|_{\Lambda_n}$, причем ряды сходятся и в $L^2(\Lambda)$. Тогда

$$(Jf, Jg) = \left(\sum_n J_n f_n, \sum_m J_m g_m\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} J_n f_n, \sum_{m=1}^{N} J_m g_m\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(J_n f_n, J_n g_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle f_n, g_n\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{N} f_n, \sum_{m=1}^{N} g_m\right\rangle = \langle f, g\rangle. \tag{10.19}$$

Мы учли, что $J_n f_n \perp J_m g_m$ при $n \neq m$ (см. доказательство леммы 10.9) и то, что $\langle f_n, g_n\rangle_{L^2(\Lambda_n)} = \langle f_n, g_n\rangle_{L^2(\Lambda)}$. Итак, J — это изометрия. Очевидно, образ $L^2(\Lambda)$ при изометрии J есть подпространство в $L^2(\Omega)$, обозначенное L_Z^2. Для $B \in \mathcal{K}$ имеем $\mu(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$, где $B_n = B \cap \Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, $\mathbb{1}_B \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ и $\mathbb{1}_B \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}$, где ряд сходится также в $L^2(\Lambda)$. Следовательно, по (10.15)

$$J\mathbb{1}_B = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \mathbb{1}_{B_n},$$

но в силу (10.8) имеем $J_n \mathbb{1}_{B_n} = Z(B_n)$, а по теореме 10.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z(B_n) = Z(B)$ (ряд сходится в $L^2(\Omega)$). Следовательно, для любого $B \in \mathcal{K}$ получаем $J\mathbb{1}_B = Z(B)$, т. е. формула (10.18) определяет продолжение J с $\mathcal{K}$ на $\mathfrak{M}$. Кроме того, для $B, C \in \mathfrak{M}$ по свойству изометричности J получаем

$$(Z(B), Z(C)) = (J\mathbb{1}_B, J\mathbb{1}_C) = \langle \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C\rangle = \mu(B \cap C). \ \square$$

Замечание 10.11. Ортогональная случайная мера Z называется *центрированной*, если $\mathsf{E}Z(B) = 0$ для всех $B \in \mathfrak{M}$. Построение продолжения Z с $\mathcal{K}$ на $\mathfrak{M}$ показывает, что если $\mathsf{E}Z(B) = 0$ при любом $B \in \mathcal{K}$, то это будет верно и для $B \in \mathfrak{M}$.

Теорема 10.12. *Пусть* μ — σ-*конечная мера на полукольце* $\mathcal{K}$ *подмножеств* Λ (*можно сразу продолжить ее на* $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$). *Тогда существует вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и центрированная ортогональная случайная мера* Z, *заданная на* Ω *и* δ-*кольце* $\mathfrak{M} = \{B \in \mathcal{A}\colon\ \mu(B) < \infty\}$, *такая что* μ *есть структурная мера* Z.

□ Вначале не будем требовать центрированности Z. Пусть $\Omega = \Lambda$, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$. **Если** $0 < \mu(\Lambda) < \infty$ (случай $\mu(\Lambda) = 0$ тривиален), то возьмем $P(B) = \dfrac{\mu(B)}{\mu(\Lambda)}$. **Положим** $Z(B,\omega) = \sqrt{\mu(\Lambda)}\mathbb{1}_B(\omega)$, $B \in \mathcal{A}$. Очевидно, $Z(B) \in L^2(\Omega)$. Далее, для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ имеем

$$(Z(B_1), Z(B_2)) = (\sqrt{\mu(\Lambda)})^2 \int\limits_\Omega \mathbb{1}_{B_1}\mathbb{1}_{B_2}\, dP = \mu(\Lambda)P(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1 \cap B_2).$$

Пусть теперь $\mu(\Lambda) = \infty$ и $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — разбиение Λ, причем $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Для $A \in \mathcal{A}$ **положим**

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap \Lambda_n)}{\mu(\Lambda_n)2^n}.$$

Тогда P — вероятностная мера на $\mathcal{A}$ ($P(\Lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$). **Определим для** $B \in \mathfrak{M}$

$$Z(B,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n\mu(\Lambda_n)}\mathbb{1}_{B_n}(\omega),$$

где $B_n = B \cap \Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, ряд сходится в $L^2(\Omega)$ (суммируются величины с непересекающимися носителями, при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}(\sqrt{2^n\mu(\Lambda_n)}\mathbb{1}_{B_n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\mu(\Lambda_n)\mathsf{E}\mathbb{1}_{B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\mu(\Lambda_n)\frac{\mu(B_n)}{\mu(\Lambda_n)2^n} = \mu(B) < \infty).$$

Теперь заметим, что в силу непрерывности скалярного произведения

$$(Z(B), Z(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\mu(\Lambda_n)(\mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n})_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\mu(\Lambda_n)P(B_n \cap C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap C_n) = \mu(B \cap C),$$

где $B_n = B \cap \Lambda_n$, $C_n = C \cap \Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдем **центрированную** ортогональную случайную меру, имеющую заданную структурную меру μ. Подчеркнем, что взятие $Z(B) - \mathsf{E}Z(B)$, $B \in \mathfrak{M}$, не приведет к желаемому результату (проверьте). Поэтому рассмотрим на некотором вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ действительную случайную величину η такую, что $\mathsf{E}'\eta = 0$, $\mathsf{E}'(\eta^2) = 1$, где E' обозначает усреднение по мере P'. Пусть Z – построенная выше на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ортогональная случайная мера μ. Возьмем $(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P')$ и определим на этом пространстве $\widetilde{Z}(B, \widetilde{\omega}) := Z(B,\omega)\eta(\omega')$ для $B \in \mathfrak{M}$, $\widetilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$. Легко видеть, что $\widetilde{Z}$ (волну далее опускаем) есть искомая ортогональная случайная мера. □

Теперь мы будем рассматривать **комплекснозначные с.ф.** $X(t,\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, т. е. $X(t,\omega) = X_1(t,\omega) + iX_2(t,\omega)$, где $X_1(t,\cdot), X_2(t,\cdot)$ являются $\mathcal{F}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми величинами для каждого $t \in T$. Напомним, что для таких $X(t)$, имеющих $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$, *ковариационная функция* определяется формулой

$$r(s,t) = \operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \mathsf{E}(X(s) - \mathsf{E}X(s))(\overline{X(t) - \mathsf{E}X(t)}), \quad s, t \in T. \qquad (10.20)$$

Будет **удобно рассматривать центрированные процессы**, т. е.

$$\mathsf{E}X(t) = 0, \quad t \in T$$

(иначе мы рассмотрели бы $\tilde{X}(t) = X(t) - \mathsf{E}X(t)$).

Теорема 10.13 (Карунен). *Пусть ковариационная функция центрированного процесса $X(t,\omega)$, $t \in T$, заданного на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, допускает* ***факторизацию****, т. е. представима в виде*

$$r(s,t) = \int\limits_{\Lambda} f(s,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(d\lambda), \quad s,t \in T, \tag{10.21}$$

где $f(t,\cdot) \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ для каждого $t \in T$, а μ — некоторая σ-конечная мера. Тогда существует центрированная ортогональная случайная мера Z, заданная на δ-кольце $\mathfrak{M} = \{A \in \mathcal{A}\colon\ \mu(A) < \infty\}$ и на, вообще говоря, расширенном вероятностном пространстве $(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P')$, имеющая структурную меру μ, такая, что

$$X(t) = \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda) Z(d\lambda) \quad \textit{для каждого} \quad t \in T. \tag{10.22}$$

Если

$$\nexists\, \Psi(\cdot) \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)\colon \quad \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda)\overline{\Psi(\lambda)}\mu(d\lambda) = 0 \quad \forall t \in T \tag{10.23}$$

((10.23) означает, что $\nexists\, \Psi\colon\ \Psi \perp f(t,\cdot)$ в $L^2(\Lambda)$ для всех $t \in T$), то не требуется расширять исходное $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ для задания меры Z.

Замечание 10.14. Если $X(t)$, $t \in T$, допускает представление (10.22), то в силу теоремы 10.10 справедливо (10.21).

□ **Пусть выполнено** (10.23). Для $t \in T$ рассмотрим отображение

$$G\colon\ f(t,\cdot) \mapsto X(t,\cdot) \tag{10.24}$$

и продолжим его по линейности:

$$G\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k,\cdot)\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k,\cdot), \tag{10.25}$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $t_k \in T$, $k = 1, \ldots, n$. Покажем **корректность этого определения**, т. е. если $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(t_k,\cdot) = \sum\limits_{l=1}^{m} d_l f(s_l,\cdot)$, где $d_l \in \mathbb{C}$, $s_l \in T$, $l = 1, \ldots, m$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k X(t_k) = \sum\limits_{l=1}^{m} d_l X(s_l)$. Для этого заметим, что

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k,\cdot), \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l,\cdot) \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_k \bar{d}_l \int\limits_{\Lambda} f(t_k,\lambda)\overline{f(s_l,\lambda)}\mu(d\lambda) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_k \bar{d}_l r(t_k, s_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_k \bar{d}_l \mathsf{E} X(t_k)\overline{X(s_l)} = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k), \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \Big). \tag{10.26}$$

Пользуясь (10.26), получим, что

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l,\cdot) \Big| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) - \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \Big\|.$$

Итак, корректность установлена. Как изометрия G продолжается на $L^2[f]$, т. е. на замыкание в $L^2(\Lambda)$ функций вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(t_k,\cdot)$. При этом в силу (10.23) имеем $L^2[f] = L^2(\Lambda,\mathcal{A},\mu)$ и $G(L^2[f]) = L^2[X]$, где $L^2[X]$ — замыкание линейной оболочки процесса $X(t)$, т. е. в $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ берется замыкание линейных комбинаций вида $c_1X(t_1)+\ldots+c_nX(t_n)$ ($c_i\in\mathbb{C}$, $t_i\in T$, $i=1,\ldots,n$).

Для $B\in\mathfrak{M}$, очевидно, $\mathbb{1}_B\in L^2(\Lambda)$, и мы можем определить

$$Z(B) = G\mathbb{1}_B. \tag{10.27}$$

Тогда

$$(Z(B),Z(C)) = (G\mathbb{1}_B, G\mathbb{1}_C) = \langle \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C\rangle = \mu(B\cap C).$$

Следовательно, Z — ортогональная случайная мера на $\mathfrak{M}$ со структурной мерой μ. Мера Z центрирована, поскольку $Z(B)\in L^2[X]$ для каждого $B\in\mathfrak{M}$, а $\mathsf{E}\zeta = 0$ для каждого $\zeta\in L^2[X]$, т.к. процесс X имеет нулевое среднее. Теперь для любой функции $h\in L^2(\Lambda)$ можно определить

$$Jh = \int\limits_{\Lambda} h(\lambda)Z(d\lambda).$$

По теореме 10.10 J — изометрия $L^2(\Lambda)$ на L^2_Z.

Итак, имеются две изометрии

$$G:\ L^2(\Lambda)\mapsto L^2[X]\subset L^2(\Omega)\ \text{ и }\ J:\ L^2(\Lambda)\mapsto L^2_Z\subset L^2(\Omega).$$

При этом в силу (10.27) и (10.18) справедливы равенства $G\mathbb{1}_B = J\mathbb{1}_B$ для $B\in\mathfrak{M}$. Но конечные линейные комбинации таких индикаторов плотны в $L^2(\Lambda)$ (легко получается с использованием леммы 10.6). Следовательно, $G = J$ на $L^2(\Lambda)$ и, кроме того, $L^2[X] = L^2_Z$. Из (10.24) вытекает, что $Jf(t,\cdot) = X(t)$, т. е. получаем (10.22) без расширения исходного вероятностного пространства.

Пусть теперь условие (10.23) **не выполнено.** Тогда $L^2[f]\subsetneq L^2(\Lambda)$. Рассмотрим $L^2(\Lambda)\ominus L^2[f]$, т. е. ортогональное дополнение к $L^2[f]$, и возьмем в нем какой-либо базис из функций $g(u,\cdot)\in L^2(\Lambda)$, $u\in T'$, где $T'\cap T=\varnothing$ (см. [**?**]). Введем функцию

$$\rho(s,t) = \int\limits_{\Lambda} g(s,\lambda)\overline{g(t,\lambda)}\mu(d\lambda) = (g(s,\cdot),g(t,\cdot))_{L^2(\Lambda)},\quad s,t\in T'.$$

Очевидно, для $c_k\in\mathbb{C}$, $t_k\in T'$, $k=1,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k,l=1}^{n} c_k\bar{c}_l\rho(t_k,t_l) = \int\limits_{\Lambda}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k g(t_k,\lambda)\right|^2\mu(d\lambda)\geqslant 0.$$

В силу теоремы 3.3 существует комплекснозначный центрированный гауссовский процесс $\{Y(t),\ t\in T'\}$, заданный на некотором $(\Omega',\mathcal{F}',P')$, такой что

$$\operatorname{cov}(Y(s),Y(t)) = \rho(s,t),\quad s,t\in T'.$$

Возьмем $(\widetilde{\Omega,\mathcal{F},P}) = (\Omega,\mathcal{F},P)\times(\Omega',\mathcal{F}',P')$. Тогда для каждых $t\in T$, $s\in T'$ величины $X(t)$ и $Y(s)$ будут независимы на этом пространстве (для $\tilde\omega = (\omega,\omega')\in\tilde\Omega$ имеем $X(t) = X(t,\tilde\omega) = X(t,\omega)$, $Y(s) = Y(s,\tilde\omega) = Y(s,\omega')$).

Введем на $(T \cup T') \times \tilde{\Omega}$ с.ф.

$$\xi(t, \tilde{\omega}) = \begin{cases} X(t, \omega), & t \in T; \\ Y(t, \omega'), & t \in T'. \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \begin{cases} r(s,t), & s,t \in T; \\ \rho(s,t), & s,t \in T'; \\ \quad 0, & s \in T,\ t \in T' \ \text{ или } \ s \in T',\ t \in T. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \int\limits_{\Lambda} h(s,\lambda)\overline{h(t,\lambda)}\mu(d\lambda),$$

где

$$h(t,\lambda) = \begin{cases} f(t,\lambda), & t \in T; \\ g(t,\lambda), & t \in T'. \end{cases}$$

Мы учли, что $f(t,\cdot) \perp g(s,\cdot)$ в $L^2(\Lambda)$ для $t \in T$ и $s \in T'$. Кроме того, $L^2[h] = L^2(\Lambda)$, т. к. $\nexists\, \Psi \in L^2(\Lambda)$: $\Psi \perp h(t,\cdot)$ для всех $t \in T \cup T'$. Следовательно, по доказанному существует ортогональная случайная мера Z на $\mathfrak{M}$ и $(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P})$, такая что $L^2[\xi] = L^2_Z$ и

$$\xi(t) = \int\limits_{\Lambda} h(t,\lambda)Z(d\lambda), \quad t \in T \cup T'.$$

Но при $t \in T$ имеем $\xi(t,\tilde{\omega}) \equiv X(t,\tilde{\omega})$. Следовательно, при $t \in T$

$$X(t,\tilde{\omega}) = X(t,\omega) = \int\limits_{\Lambda} h(t,\lambda)Z(d\lambda) = \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda)Z(d\lambda).$$

Центрированность Z выясняется теперь так же, как и в случае, когда выполнялось условие (10.23). □

Дополнения и упражнения.

Упр. 10.1. Должна ли ортогональная случайная мера Z, заданная на полукольце $\mathcal{K}$ множеств Λ, быть зарядом для п.в. $\omega \in \Omega$, т.е. быть счетно аддитивной функцией на $\mathcal{K}$? Существует ли ортогональная случайная мера Z с указанным свойством?

Упр. 10.2. Покажите, что эквивалентный подход к построению интеграла по ортогональной случайной мере получится, если вместо определения (10.2) использовать следующее. Пусть каждому B из полукольца $\mathcal{K}$ подмножеств Λ сопоставлена комплекснозначная величина $Z(B) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такая, что $(Z(B), Z(C)) = 0$, если $B, C \in \mathcal{K}$ и $B \cap C = \varnothing$ (по-прежнему, $(\xi,\eta) = \mathsf{E}\xi\overline{\eta}$ для $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Пусть функция Z обладает также свойством (10.3). Тогда $\mu(B) := \mathsf{E}|Z(B)|^2$ есть мера на $\mathcal{K}$ и при этом имеет место (10.2).

Упр. 10.3. Пусть Z_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ – комплекснозначный L^2-процесс (см. с. 28) такой, что

1) $\mathsf{E}|Z_\lambda - Z_\nu|^2 \to 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ при $\nu \downarrow \lambda$,

2) приращения ортогональны, т.е. для всех $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$$\mathsf{E}(Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})\overline{(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_2})} = 0.$$

На полукольце $\mathcal{K} = \{(a,b],\ -\infty < a \leqslant b < \infty\}$, где $(a,a] = \varnothing$, введем $Z((a,b]) := Z(b) - Z(a)$. Докажите, что Z – ортогональная случайная мера.

Если мера порождается указанным выше процессом Z_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, то вместо (10.17) используют запись $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dZ_\lambda$.

Упр. 10.4. Пусть Z – ортогональная случайная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, причем $\mathsf{E}|Z(\mathbb{R})|^2 < \infty$. Положим $Z_\lambda = Z((-\infty, \lambda])$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, что Z_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ – процесс со свойствами 1), 2), указанными в предыдущем упражнении.

Упр. 10.5. Пусть Z_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ – центрированный гауссовский процесс с ортогональными приращениями, непрерывный справа в среднем квадратическом (выясните, обязан ли тогда процесс быть непрерывным слева в среднем квадратическом). Пусть при каждом $t \in T$ функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t, \lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty,$$

где μ – структурная мера, отвечающая ортогональной случайной мере Z, порожденной процессом Z_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. упражнение 10.3). Докажите, что тогда

$$Y = \{Y(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t, \lambda) dZ_\lambda,\ t \in T\}$$

есть центрированный гауссовский процесс.

Упр. 10.6. Пусть Z – ортогональная случайная мера, заданная на $\Omega \times B \in \mathfrak{M}$ и имеющая σ-конечную структурную меру μ на измеримом пространстве $(\Lambda, \mathcal{A})$ (напомним, что δ-кольцо $B \in \mathfrak{M} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\}$). Пусть $h : \Lambda \to \mathbb{C}$, $h \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$. Введем δ-кольцо

$$\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{A} : \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty\}$$

и положим

$$V(B) := \int_\Lambda \mathbb{1}_B(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda),\ B \in \mathcal{N}. \tag{10.28}$$

Объясните, почему V является ортогональной случайной мерой (центрированной, если центрирована Z) с σ-конечной структурной мерой

$$\nu(B) = \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty,\ B \in \mathcal{N}.$$

Докажите, что если $g : \Lambda \to \mathbb{C}$, $g \in L^2(\Lambda, \sigma\{\mathcal{N}\}, \nu)$, то

$$\int_\Lambda g(\lambda) V(d\lambda) = \int_\Lambda g(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda). \tag{10.29}$$

В связи с теоремой Карунена здесь и в лекции 11 **мы вновь обратимся к очень важному вопросу о канонических представлениях случайных процессов**.

Рассмотрим пространство $L^2[a, b]$, состоящее из комплекснозначных функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на $[a, b]$. Скалярное прозведение в этом гильбертовом пространстве определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt,\ f, g \in L^2[a, b]. \tag{10.30}$$

Сначала рассмотрим пример, иллюстрирующий теорему 10.13.

Пример Д10.7. Докажем, что для винеровского процесса на отрезке $[0, 2\pi]$ справедливо представление

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ikt}}{ik} z_k, \tag{10.31}$$

где z_k – ортонормированные центрированные случайные величины, и ряд сходится при каждом $t \in [0, 2\pi]$ в среднем квадратическом (при $k = 0$ полагаем $(1-e^{ikt})/ik = -t$).

□ Для $s, u \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\mathbb{1}_{[0,s]}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(s) e^{iku}. \tag{10.32}$$

Функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iku}$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0, 2\pi]$ и при каждом $s \in [0, 2\pi]$ ряд (10.32) сходится в этом пространстве, а коэффициенты Фурье

$$c_k(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[0,s]}(u) e^{-iku} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-iks})/ik, \; k \in \mathbb{Z},$$

$(c_0(s) = s/\sqrt{2\pi})$. Равенство Парсеваля дает при $s, t \in [0, 2\pi]$

$$\min\{s, t\} = (\mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-iks})(1 - e^{ikt})}{k^2}.$$

Остается применить теорему 10.13, положив $\Lambda = \mathbb{Z}$, $f(t, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-e^{-ikt}}{ik}$, где $t \in [0, 2\pi]$, $k \in \Lambda$ и выбрав μ считающей мерой на Λ, т.е. $\mu(\{k\}) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Упр. 10.8. Докажите, что (10.31) справедливо п.н. с независимыми величинами $z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Точнее говоря, докажите, что при таком выборе z_k, $k \in \mathbb{Z}$, правая часть (10.31) имеет непрерывную модификацию, являющуюся центрированным гауссовским процессом с ковариационной функцией $\min\{s, t\}$, $s, t \in [0, 2\pi]$.

Далее **нам понадобятся некоторые утверждения, относящиеся к теории операторов в гильбертовых пространствах**. Предварительно предлагается выполнить элементарное

Упр. 10.9. Пусть $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ – комплекснозначный L^2-процесс, непрерывный в среднем квадратическом на отрезке $[a, b]$. Докажите, что это равносильно тому, что на $[a, b]$ непрерывна функция $m(t) = \mathsf{E}X(t)$ и на $[a, b] \times [a, b]$ непрерывна коариационная функция $r(s, t) = \mathrm{cov}(X(s), X(t))$.

С непрерывной на $[a, b] \times [a, b]$ ковариационной функцией r свяжем ограниченный линейный *оператор Фредгольма*, который действует в $L^2[a, b]$ и вводится следующим образом:

$$Af(s) = \int_a^b r(s, t) f(t) dt, \; f \in L^2[a, b], \tag{10.33}$$

r при этом называется *ядром интегрального оператора* A.

Упр. 10.10. Докажите, что введенный в (10.33) оператор A *компактен* (ограниченное по норме множество переводит в предкомпактное).

Кроме того A – оператор Гильберта – Шмидта (см. [?]), поскольку

$$\int_a^b \int_a^b |r(s,t)|^2 ds dt < \infty. \tag{10.34}$$

Заметим, что A является самосопряженным оператором, т.к. (см. [?, с. 531]) его сопряженный A^* задается эрмитово сопряженным ядром $\overline{r(t,s)}$, а для ковариационной функции $r(s,t) = \overline{r(t,s)}$ при всех s, t.

Напомним (см. [?], гл. 4, §6) классический результат.

Теорема Д10.11 (Гильберт – Шмидт). *Пусть A – компактный самосопряженный оператор в (комплексном) гильбертовом пространстве H. Тогда существует ортонормированная система $\{\phi_n\}_{n\in J}$ собственных векторов A, отвечающих ненулевым собственным значениям, таких, что любой элемент $h \in H$ записывается единственным образом в виде*

$$h = \sum_{n\in J} c_n \phi_n + u, \tag{10.35}$$

где $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in J$, а $u \in \mathrm{Ker}A$, т.е. $Au = 0$. Множество J всегда конечно или счетно (в последнем случае ряд (10.35) сходится по норме $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$). Точнее говоря, в силу компактности A число собственных значений λ_n во внешности любого круга с центром в 0 конечно, поэтому их можно перенумеровать в порядке неубывания модулей $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$. Если J счетно, то $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Отметим, что собственные значения самосопряженного оператора A в H действительны, а собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, так что $(\phi_n, u) = 0$, $n \in J$.

Для оператора A из (10.33) в силу сепарабельности $H = L^2[a,b]$ в подпространстве $\mathrm{Ker}A$ можно выбрать ортонормированный базис $\{\phi_k\}_{k\in M}$, где M – конечно или счетно (считаем множества M и J непересекающимися, если $\mathrm{Ker}A = 0$, то $M = \varnothing$). Дополнив систему $\{\phi_n\}_{n\in J}$ до ортонормированного базиса $\{\phi\}_{n\in J\cup M}$ в H, перепишем (10.35) в виде разложения по собственному базису A:

$$h = \sum_{k\in J\cup M} c_k \phi_k,\ c_k = (h, \phi_k),\ k \in J \cup M. \tag{10.36}$$

Если семейство индексов $J \cup M$ счетно, этот ряд Фурье сходится по норме $L^2[a,b]$.

В силу упражнений 10.9 и 10.10 для ковариационной функции r непрерывного в среднем квадратическом процесса $X = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ имеем согласно (10.36) при каждом $t \in [a,b]$

$$\overline{r(t,\cdot)} = \sum_{k\in J\cup M} c_k(t)\phi_k(\cdot), \tag{10.37}$$

Здесь

$$c_k(t) = \int_a^b \overline{r(t,s)\phi_k(s)} ds = \overline{\lambda_k \phi_k(t)} = \lambda_k \overline{\phi_k(t)}, \tag{10.38}$$

поэтому

$$r(t,\cdot) = \sum_{k\in J} \lambda_k \phi_k(\cdot)\overline{\phi_k(t)}. \tag{10.39}$$

Если J – счетно, то ряды (10.36), (10.39) сходятся в $L^2[a,b]$ при любом $t \in [a,b]$. Мы учли, что все λ_k действительны и, что $\lambda_k = 0$, $k \in M$.

Упр. 10.12. Докажите, что $\lambda_k > 0$ при $k \in J$ в силу неотрицательной определенности функции r.

Справедливо усиление соотношения (10.39), как показывает

Теорема Д10.13 (Мерсер). *Пусть r – непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ ковариационная функция. Тогда для всех $s, t \in [a,b]$*

$$r(s,t) = \sum_{k \in J} \lambda_k \phi_k(s) \overline{\phi_k(t)}, \tag{10.40}$$

причем, если J – счетно, то ряд (10.40) *сходится абсолютно и равномерно на $[a,b] \times [a,b]$. Здесь, по-прежнему λ_k и ϕ_k обозначают положительные собственные значения и соответствующие собственные функции оператора* (10.33).

В качестве следствия отсюда вытекает

Теорема Д10.14 (Карунен – Лоэв). *Пусть $X = \{X(t),\ t \in [a,b]\}$ – непрерывный в среднем квадратическом на $[a,b]$ центрированный L^2-процесс, имеющий ковариационную функцию r. Тогда при каждом $t \in [a,b]$*

$$X(t) = \sum_{k \in J} \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t) z_k \quad \text{п.н.}, \tag{10.41}$$

где λ_k, ϕ_k – те же, что и в (10.40), *а $\{z_k,\ k \in J\}$ – центрированные ортонормированные случайные величины. Для счетного J ряд* (10.41) *сходится в среднем квадратическом.*

□ Положим $T = [a,b]$, $\Lambda = J$ и $f(t,k) = \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t)$ для $t \in T$, $k \in \Lambda$. Тогда (10.40) превращается в (10.21), где μ – считающая мера на Λ, т.е. $\mu(\{k\}) = 1$ для $k \in \Lambda$. Остается воспользоваться теоремой (10.13). □

Упр. 10.15. Непосредственно докажите, оценив

$$\mathsf{E}|X(t) - \sum_{k \leqslant n} \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t) z_k|^2,$$

что если выполнены условия теоремы Д10.14, то в разложении (10.41) можно выбрать центрированные ортонормированные величины

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b X(t) \phi_k(t) dt, \tag{10.42}$$

где интеграл определяется (и существует) как предел в среднем квадратическом интегральных сумм Римана. Для этого объясните, почему при непрерывной на $[a,b] \times [a,b]$ ковариационной функции r собственные функции $\phi_k \in C[a,b]$, $k \in J$. Кроме того, докажите, что среднеквадратическая сходимость в (10.41) с данными z_k, $k \in J$, будет равномерна по $t \in [a,b]$.

Пример Д10.16. Найдем разложение Карунена – Лоэва для винеровского процесса $W(t)$, $t \in [0,1]$.

□ Определим собственные значения и собственные функции интегрального оператора, отвечающего непрерывной на $[0,1] \times [0,1]$ ковариационной функции $r(s,t) = \min\{s,t\}$,

$s, t \in [0,1]$. Так как $\lambda_k > 0$ для $k \in J$ согласно упр. 10.12, а $\phi_k \in C[0,1]$ согласно упр. 10.15, решим относительно $\lambda > 0$ и $\phi \in C[0,1]$ уравнение

$$\int_0^1 r(s,t)\phi(t)dt = \lambda\phi(s), \ s \in [0,1], \tag{10.43}$$

т.е.

$$\int_0^s t\phi(t)dt + s\int_s^1 \phi(t)dt = \lambda\phi(s). \tag{10.44}$$

Поскольку левая часть (10.44) дифференцируема в каждой точке $s \in [0,1]$ (в концах отрезка односторонние производные), то ϕ дифференцируема, и

$$\int_s^1 \phi(t)dt = \lambda\phi'(s), \ s \in [0,1].$$

Снова дифференцируя по s обе части этого равенства, имеем

$$\phi''(s) = -(1/\lambda)\phi(s). \tag{10.45}$$

Общее решение уравнения (10.45) задается формулой

$$\phi(s) = A\cos(s/\sqrt{\lambda}) + B\sin(s/\sqrt{\lambda}),$$

где A, B – константы. Учитывая, что $\phi(0) = 0$, $\phi'(1) = 0$, находим

$$A = 0, \quad (B/\sqrt{\lambda})\cos(1/\sqrt{\lambda}) = 0,$$

откуда

$$\lambda_k = ((k+1/2)\pi)^{-2}, \ k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}. \tag{10.46}$$

Условие нормировки $\int_0^1 \phi_k^2(s)ds = 1$ дает

$$\phi_k(t) = \sqrt{2}\sin((k+1/2)\pi s), \ s \in [0,1], \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.47}$$

Легко проверить, что все найденные λ_k и ϕ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяют исходному уравнению (10.44). Таким образом, получаем

$$W(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((k+1/2)\pi t)}{(k+1/2)\pi t} z_k, \tag{10.48}$$

где $\{z_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ –последовательность ортонормированных и центрированных в силу упражнения 10.15 случайных величин, а ряд в (10.48) сходится в среднем квадратическом равномерно на $[0,1]$. □

Упр. 10.17. Докажите, что если $X = \{X(t), \ t \in T\}$ – гауссовский процесс, то $L^2[X]$ есть гауссовская система, т.е. для любого n и любых $Y_1, \dots, Y_n \in L^2[X]$ вектор $(Y_1, \dots, Y_n)$ имеет гауссовское распределение.

Замечание Д10.18. Предыдущее упражнение показывает, что $L^2[W(t), \ t \in [0,1]]$ – гауссовская система. Согласно упражнению 10.15 $\{z_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ – гауссовский процесс. Поскольку для центрированных действительных гауссовских величин ортогональность равносильна независимости, применив упражненение 5.8, получаем, что ряд (10.48) при каждом $t \in [0,1]$ сходится с вероятностью единица, где независимые $z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определены на том же $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, что и данный винеровский процесс.

Упр. 10.19. Можно ли утверждать, что если взять на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ последовательность независимых величин $z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то правая часть равенства (10.48) определит винеровский процесс на $[0,1]$?

Упр. 10.20. Объясните, почему оператор Фредгольма, рассмотренный в примере Д10.16, имеет $\mathrm{Ker}A = 0$. Постройте пример непрерывного в среднем квадратическом процесса $X = \{X(t),\ t \in [a,b]\}$, для которого оператор (10.33) имеет $\mathrm{Ker}A \neq 0$.

Упр. 10.21. Найдите разложение Карунена – Лоэва для броуновского моста

$$W_0(t) = W(t) - tW(1),\ t \in [0,1].$$

Выведите отсюда представление для $W(t)$, $t \in [0,1]$, отличное от (10.48).

Упр. 10.22. Найдите на отрезке $[0,c]$ разложение Карунена – Лоэва для процесса Орнштейна – Уленбека, имеющего ковариационную функцию $r(s,t) = e^{-\alpha|s-t|}$, где $\alpha > 0$, $s,t \in \mathbb{R}$.

Упр. 10.23. Пусть $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ – непрерывный в среднем квадратическом процесс с ковариационной функцией $r(s,t) = R(s-t)$. Пусть X – периодический процесс с периодом τ, т.е. $X(t+\tau) = X(t)$ п.н. для каждого $t \in \mathbb{R}$. Найдите разложение Карунена – Лоэва для X.

Отметим, что **пуассоновские ортогональные случайные меры используются для канонических представлений процессов с независимыми приращениями** (см., напр., [?], гл. VI, §4 и [?], ч. 1, §15-18). Применениям различных канонических разложений случайных функций посвящены монографии [?], [?], [?]. Особенно важное значение канонические представления имеют для приложений теории случайных процессов к решению задач обнаружения и воспроизведения сигналов в присутствии помех. В частности, большой интерес представляет вопрос, когда в той или иной задаче можно ограничиться конечным числом членов, участвующих в каноническом разложении случайной функции. Иллюстрирующие примеры такого рода можно найти в §174 [?].

В заключение этого раздела **рассмотрим еще одну форму канонических разложений, приводящую естественным образом к изучению случайных процессов, индексированных семейством неслучайных функций**.

Пусть H – гильбертово пространство, состоящее из некоторых комплекснозначных функций, определенных на T. Функция $K : T \times T \to \mathbb{C}$ называется *воспроизводящим ядром* гильбертова пространства H, если

1°. $K(t,\cdot) \in H$ для любого $t \in T$,

2°. $\langle f, K(t,\cdot)\rangle = f(t)$ для любого $f \in H$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в H.

Теорема Д10.24 (Ароншайн). *Для того, чтобы функция K была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно определена.*

□ **Пусть K – воспроизводящее ядро**. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $t_1,\dots,t_n \in T$, $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{j,r=1}^{\infty} z_j \overline{z}_r \langle K(t_j,\cdot), K(t_r,\cdot)\rangle = \|\sum_{j=1}^{n} z_j K(t_j,\cdot)\|^2,$$

здесь $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$, $u \in H$.

Обратно. Пусть K – неотрицательно определенная функция на $T \times T$. Рассмотрим $\mathcal{L}in(K)$ – линейную оболочку функций $K(\cdot, t)$, $t \in T$. Для $f, g \in \mathcal{L}in(K)$, т.е. для функций вида

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j K(t_j, \cdot), \ g = \sum_{r=1}^{m} b_r K(s_r, \cdot), \tag{10.49}$$

где $a_j, b_r \in \mathbb{C}$, $t_j, s_r \in T$ $(j = 1, \ldots, n,\ r = 1, \ldots, m)$, положим

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_j \overline{b}_r K(t_j, s_r). \tag{10.50}$$

Упр. 10.25. Проверьте, что определение (10.50) корректно, т.е. не зависят от того, с помощью каких коэффициентов a_j, b_r и каких точек t_j, s_r записаны функции $f, g \in \mathcal{L}in(K)$.

Из (10.50) видим, выбрав $b_r = \delta_{ir}$, $i, r \in \{1, \ldots, m\}$, что

$$\langle f, K(s_i, \cdot) \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j K(t_j, s_i) = f(s_i).$$

Поскольку s_i – произвольная точка, получаем свойство 2°.

В силу неотрицательной определенности K функция $\langle \cdot, \cdot \rangle$, введенная в (10.50), обладает на $\mathcal{L}in(K) \times \mathcal{L}in(K)$ всеми свойствами скалярного произведения (поясните). Для $f \in \mathcal{L}in(K)$ положим $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$. Теперь пополним $\mathcal{L}in(K)$ по $\| \cdot \|$. Если f_n – фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}in(K)$, то для любого $t \in T$, применяя неравенство Коши – Буняковского – Шварца, получаем

$$|f_N(t) - f_M(t)| = |\langle f_N - f_M, K(t, \cdot) \rangle| \leqslant \|f_N - f_M\| (K(t,t))^{1/2}. \tag{10.51}$$

Мы учли, что $\|K(t, \cdot)\|^2 = \langle K(t, \cdot), K(t, \cdot) \rangle = K(t,t)$. Таким образом, $\{f_N\}$ определяет единственную функцию f на T. Обозначим H указанное пополнение $\mathcal{L}in(K)$. Для $f, g \in H$ доопределим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по непрерывности. Доказательство теоремы завершает

Упр. 10.26. Проверьте, что построенное H является гильбертовым пространством, имеющим функцию K воспроизводящим ядром. □

Согласно теореме 3.3 класс неотрицательно определенных функций совпадает с классом ковариационных функций. Поэтому **любую ковариационную функцию $r(s, t)$, $s, t \in T$ можно рассматривать как воспроизводящее ядро некоторого гильбертова пространства** H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (по теореме Д10.24 мы знаем, каково H). Следовательно,

$$r(s, t) = \langle r(s, \cdot), r(t, \cdot) \rangle. \tag{10.52}$$

Теорема Д10.27 (Парзен). *Пусть $X = \{X(t),\ t \in T\}$ есть центрированный L^2-процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с ковариационной функцией $r(s, t)$, $s, t \in T$. Пусть H – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром r и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существует центрированный L^2-процесс $Y = \{Y(h),\ h \in H\}$ такой, что*

$$X(t) = Y(r(t, \cdot)) \ \ \text{п.н. для каждого} \ \ t \in T, \tag{10.53}$$

$$(Y(h), Y(g)) = \langle h, g\rangle \quad \textit{для любых} \quad h, g \in H, \tag{10.54}$$

здесь $(\xi,\eta) = \mathsf{E}\xi\overline{\eta}$ *для* $\xi,\eta \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. *При этом пространства* $L^2[X]$ *и* H *изометричны, здесь* $L^2[X]$ *– это замыкание в среднем квадратическом* $\mathcal{L}in(X)$ *(т.е. линейной оболочки* X*).*

□ Для $h = \sum_{k=1}^n c_k r(t_k,\cdot) \in H$, $c_k \in \mathbb{C}$, $t_k \in T$, $k = 1,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$, положим

$$Y(h) := \sum_{k=1}^n c_k X(t_k).$$

Легко видеть, что это определение корректно и задает изометрическое отображение, которое продолжается на H и обладает искомыми свойствами. □

Между теоремами Д10.27 и 10.13 имеется тесная связь, как показывает

Упр. 10.28. Докажите, что если ковариационная функция r допускает представление (10.21), то гильбертово пространство H с воспроизводящим ядром r состоит из функций

$$h(t) = \int_\Lambda g(\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(d\lambda),\;\; g \in L^2[f], \tag{10.55}$$

где $L^2[f]$ – замыкание в $L^2(\Lambda,\mathcal{A},\mu)$ линейной оболочки функций $f(t,\cdot)$, $t \in T$ (в частности, g может явно зависеть и от t, например, совпадать с $f(t,\cdot)$). Скалярное произведение в H задается формулой

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_\Lambda g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}\mu(d\lambda), \tag{10.56}$$

где h_k и g_k, $k = 1, 2$ связаны соотношением (10.55). Пусть Z – ортогональная случайная мера на $B \in \mathfrak{M}\times(\Omega,\mathcal{F},P)$, имеющая структурной мерой μ (см. теорему 10.10), и пусть $L^2[f] = L^2(\Lambda,\mathcal{A},\mu)$. Объясните, почему для процесса $X = \{X(t),\, t \in T\}$ вида (10.22), процесс Y, фигурирующий в теореме Д10.27, задается формулой

$$Y(h) = \int_\Lambda g(\lambda)Z(d\lambda), \tag{10.57}$$

где h определяется по g согласно (10.55).

Упр. 10.29. Докажите, что (действительное) гильбертово пространство H с воспроизводящим ядром $r(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \in \mathbb{R}_+$ (т.е. r – ковариационная функция винеровского процесса), состоит из функций

$$h(t) = \int_0^t g(\lambda)d\lambda,\;\; t \in \mathbb{R}_+,\;\; \int_0^\infty g^2(\lambda)d\lambda < \infty, \tag{10.58}$$

где $d\lambda$ – мера Лебега. Объясните, почему $L^2[W]$, т.е. замкнутая в $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ линейная оболочка $W(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, состоит из величин вида (10.57), где Z – ортогональная случайная мера на $B \in \mathfrak{M}\times(\Omega,\mathcal{F},P)$, порожденная самим винеровским процессом (см. пример 10.2), а функция g удовлетворяет условию (10.58).

Замечание Д10.30. Шар Штрассена (см. теорему Д4.11 при $q = 1$) – это единичный шар в гильбертовом пространстве H функций на $[0,1]$ с воспроизводящим ядром $r(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \in [0,1]$. Нетрудно получить аналогичный вывод и для вектор-функций при $q > 1$.

Лекция 11. Спектральное представление стационарных процессов

Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Непрерывность процессов в среднем квадратическом. Теорема Бохнера–Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в $L^2(\Omega)$. Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Периодограмма и ее усреднение. Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы, как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса.

Эта лекция посвящена, главным образом, **спектральному представлению** так называемых **стационарных** (в широком смысле) **случайных процессов, которое будет получено, как следствие доказанной теоремы Карунена**. Для этого нам понадобятся новые понятия и вспомогательные результаты.

Комплекснозначная функция $g(t), t \in T$, заданная на группе T (всюду далее – по сложению), называется *неотрицательно определенной*, если неотрицательно определена функция $R(s,t) = g(s-t)$, $s, t \in T$, т.е. выполнено (3.6). Комплекснозначный L^2 – процесс $\{X(t),\ t \in T\}$ (т.е. $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$, $t \in T$), где T – группа, называется *стационарным в широком смысле*, если

$$\mathsf{E}X(t) = a \ \text{ при всех } \ t \in T, \tag{11.1}$$

$$r(s,t) = \operatorname{cov}(X(s), X(t)) = r(s-t, 0) =: R(s-t) \ \text{ при всех } \ s, t \in T, \tag{11.2}$$

Из теоремы 3.3 вытекает, что **класс неотрицательно определенных функций** $\{R(t),\ t \in T\}$**, где** T **– группа, совпадает с классом ковариационных функций стационарных (гауссовских) процессов** $\{X(t),\ t \in T\}$.

Процесс $\{X(t),\ t \in T\}$, где T – группа, называется *стационарным в узком смысле*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $u, t_1, \ldots, t_n \in T$

$$(X(t_1+u), \ldots, X(t_n+u)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X(t_1), \ldots, X(t_n)),$$

т.е. все конечномерные распределения не меняются при сдвигах. Легко видеть, что стационарный в узком смысле L^2-процесс будет стационарен в широком смысле. Для гауссовских процессов эти понятия совпадают.

Описание неотрицательно определенных функций на $\mathbf{Z}$ дает следующая теорема.

Теорема 11.1 (Герглотц). *Функция $R(n)$, $n \in \mathbb{N}$, является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{11.3}$$

где Q – неотрицательная конечная мера на $\mathcal{B}([-\pi,\pi])$. Здесь и далее $\int_{-\pi}^{\pi}$ обозначает интеграл по отрезку $[-\pi,\pi]$.

□ Очевидно, функция (11.3) является неотрицательно определенной, поскольку для любых $n \in \mathbb{N}$, всех $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ и $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,q=1}^{n} z_k \overline{z}_q R(t_k - t_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\lambda}\Big|^2 Q(d\lambda) \geqslant 0. \qquad (11.4)$$

Обратно. Для $N \geqslant 1$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$ введем непрерывные и неотрицательные (в силу неотрицательной определенности $R(\cdot)$) функции

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} R(k-q) e^{-ik\lambda} e^{iq\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} (1 - |m|/N) R(m) e^{-im\lambda}. \qquad (11.5)$$

Мы учли, что имеется $N-|m|$ пар (k,q), для которых $k-q=m$ (здесь $k, q \in \{1, \dots, N\}$, $|m| < N$). Определим на $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$ меру Q_N с плотностью f_N по мере Лебега, т.е. положим

$$Q_N(B) = \int_B f_N(\lambda) d\lambda, \;\; B \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Тогда, согласно формуле (2.10), для $N \geqslant 1$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f_N(\lambda) d\lambda = \begin{cases} (1 - |n|/N) R(n), & |n| < N, \\ 0, & |n| \geqslant N. \end{cases} \qquad (11.6)$$

По теореме Прохорова (доказанной в приложении 4), взяв компакт $K = [-\pi, \pi]$ и принимая во внимание, что $Q_N([-\pi, \pi]) = R(0) < \infty$ для всех N (подставляем $n = 0$ в (11.6)), находим подпоследовательность $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$ такую, что $Q_{N_k} \Rightarrow Q$, где Q – некоторая конечная неотрицательная мера на $[-\pi, \pi]$. Тогда, учитывая (11.6), получим для каждого $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_{N_k}(d\lambda) = R(n). \;\square$$

Как следствие выводим следующий важный результат.

Теорема 11.2. *Пусть $\{X(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ – центрированный стационарный в широком смысле процесс, определенный на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда на том же вероятностном пространстве существует ортогональная случайная мера $Z(\cdot)$, заданная на $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$, такая, что*

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (11.7)$$

□ По теореме Герглотца для $s, t \in \mathbb{Z}$

$$r(s,t) = \mathrm{cov}(X(s), X(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} Q(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \overline{e^{it\lambda}} Q(d\lambda), \qquad (11.8)$$

где Q – конечная неотрицательная мера на $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$. Значит, применима теорема Карунена (теорема 10.13), где $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $t \in \mathbb{Z}$. При этом выполнено условие (10.23). Действительно, любую функцию из $L^2 = L^2([-\pi,\pi],\mathcal{B}([-\pi,\pi]),Q)$ можно аппроксимировать в L^2 непрерывной, принимающей одинаковые значения в точках $-\pi$ и π, а такая функция равномерно приближается суммами Фейера. □

Меру Q, фигурирующую в (11.3), можно переопределить (не меняя обозначений), перенеся "массу" $Q(\{-\pi\})$ из точки $-\pi$ в π, где возникнет "масса" $Q(\{-\pi\})+Q(\{\pi\})$. При этом значение интеграла в правой части формулы (11.3) не изменится, поскольку $e^{-in\pi} = e^{in\pi}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. **Указанное переопределение делается лишь для того, чтобы представить интеграл по промежутку $(-\pi,\pi]$ как интеграл по единичной окружности**. Если такое перенесение массы произведено, то $Z(\{-\pi\}) = 0$ п.н. в силу теоремы 10.12, поэтому и в (11.7) интегрирование фактически ведется по $(-\pi,\pi]$. Разумеется, можно свести интегрирование и к интегрированию по полуинтервалу $[-\pi,\pi)$.

В качестве приложения спектрального представления (11.7) **рассмотрим вариант закона больших чисел**.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.2. *Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\}) \quad \text{при} \quad N\to\infty. \tag{11.9}$$

□ Воспользуемся (11.7). В силу линейности стохастического интеграла

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\lambda} Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(\lambda) Z(d\lambda),$$

где

$$\Psi_N(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\,\dfrac{(1-e^{iN\lambda})}{(1-e^{i\lambda})}, & \lambda\neq 0,\\ 1, & \lambda = 0.\end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 10.10

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k - Z\{0\}\right\|_{L^2(\Omega)} = \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_N(\lambda)|^2 G(d\lambda), \tag{11.10}$$

где $\chi_N(\lambda) = \Psi_N(\lambda) - \mathbb{1}_{\{0\}}(\lambda)$, $G(\cdot)$ — структурная мера, отвечающая мере $Z(\cdot)$. Учитывая, что $\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k}\right| \leqslant 1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, и то, что $\chi_N(0) = 0$ и для $\lambda\neq 0$, $\lambda\in(-\pi,\pi]$

$$|\chi_N(\lambda)| \leqslant \frac{2}{N|1-e^{i\lambda}|} \to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (11.10) получаем (11.9). □

Замечание 11.4. Если $\{X(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле процесс и $\mathsf{E}X_t = a$, $t\in\mathbb{Z}$, то

$$X_t - a = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda)$$

и $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(X_k - a) = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X_k - a \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} Z(\{0\})$. Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} a \quad \text{при} \quad N \to \infty \tag{11.11}$$

тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}|Z(\{0\})|^2 = 0$, что равносильно условию $G(\{0\}) = 0$, т. е. у структурной меры (говорят также спектральной меры) нет атома в нуле. Свойство (11.11) называется *эргодичностью в* $L^2(\Omega)$.

Рассмотрим на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ комплекснозначный L^2-процесс $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$. Процесс $X(\cdot)$ *непрерывен в среднем квадратическом в точке* $t \in \mathbb{R}$, если

$$\|X(s) - X(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad s \to t, \tag{11.12}$$

где $\|\xi\| = (\mathsf{E}|\xi|^2)^{1/2}$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Непрерывность на множестве означает непрерывность в каждой точке этого множества.

Теорема 11.5. *Стационарный в широком смысле процесс* $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *непрерывен в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда ковариационная функция* $R(\cdot)$*, определенная в* (11.2)*, непрерывна в нуле.*

□ Процессы $X(t)$ и $X(t) - a$, где $a = const$, очевидно, только одновременно непрерывны (в среднем квадратичном) в какой-либо точке $t \in \mathbb{R}$. Поэтому без потери общности можем считать процесс центрированным и имеющим ковариационную функцию $r(s,t) = \mathsf{E}X(s)\overline{X(t)} = R(s-t)$ для $s,t \in \mathbb{R}$. **Если процесс** $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ **непрерывен в среднем квадратическом на** $\mathbb{R}$, то для $s,t,u,v \in \mathbb{R}$

$$|r(u,v) - r(s,t)| \leqslant \|X(u) - X(s)\|\,\|X(v)\| + \|X(s)\|\,\|X(v) - X(t)\| \to 0$$

при $u \to s$ и $v \to t$. Мы воспользовались неравенством Коши – Буняковского – Шварца и тем, что если $X(v) \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} X(t)$, то и $\|X(v)\| \to \|X(t)\|$ при $v \to t$. Остается учесть, что $R(t) - R(0) = r(t,0) - r(0,0)$.

Обратно.

$$\|X(s) - X(t)\|^2 = -(R(t-s) - R(0)) - (R(s-t) - R(0)) \to 0$$

при $s \to t$, если $R(\cdot)$ непрерывна в 0. □

Следствие 11.6. *Функция* $R(\cdot)$*, неотрицательно определеная на* $\mathbb{R}$*, непрерывна на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле.*

□ Пусть функция $R(\cdot)$ неотрицательно определена на $\mathbb{R}$ и непрерывна в нуле. По теореме 3.3 строим центрированный стационарный в широком смысле (гауссовский) процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ с ковариационной функцией $r(s,t) = \mathsf{E}X(s)\overline{X(t)} = R(s-t)$, $s,t \in \mathbb{R}$. В силу теоремы 11.5 этот процесс непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$. Тогда

$$|R(s) - R(t)| = |\mathsf{E}X(t)\overline{X(0)} - \mathsf{E}X(s)\overline{X(0)}| \leqslant \|X(t) - X(s)\|\|X(0)\| \to 0$$

при $s \to t$. Таким образом, $R(\cdot)$ непрерывна на всей прямой. □

Описание ковариационных функций стационарных (в широком смысле) **процессов, непрерывных в среднем квадратическом на** $\mathbb{R}$**, содержит**

Теорема 11.7 (Бохнер–Хинчин). *Пусть $R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — непрерывная в нуле неотрицательно определенная функция. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$*

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} G(d\lambda), \tag{11.13}$$

где G — неотрицательная конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Очевидно, функция (11.13) является непрерывной на всей прямой. Совершенно аналогично (11.5) убеждаемся, что она неотрицательно определена. Таким образом, **условия теоремы 11.7 не только достаточны, но и необходимы**. Доказательство теоремы Бохнера – Хинчина и ее обобщения даны в приложении 4.

Замечание 11.8. Если мера G, фигурирующая в представлении (11.13), для ковариационной функции стационарного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет плотность $f(\lambda)$ по мере Лебега, т. е. для любого $t \in \mathbb{R}$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda,$$

то функция f называется *спектральной плотностью* процесса. Из доказательства теоремы 11.7, проведенного в приложении 4, вытекает, что если $R(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, то существует непрерывная и ограниченная на всей прямой спектральная плотность, задаваемая формулой (**??**).

Теорема 11.9 (Колмогоров – Крамер). *Пусть на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан центрированный стационарный в широком смысле непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ (достаточно непрерывности только в нуле). Тогда на том же вероятностном пространстве существует ортогональная случайная мера $Z(\cdot)$, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, такая что*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.14}$$

□ В силу теоремы 11.5 функция $R(t) = \mathsf{E}X(t)\overline{X(0)}$ непрерывна (на $\mathbb{R}$) и согласно теореме 3.3 неотрицательно определена. По теореме Бохнера–Хинчина имеет место представление (11.13). Следовательно,

$$r(s,t) = \operatorname{cov}(X(s), X(t)) = R(s-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda} G(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\overline{e^{it\lambda}} G(d\lambda),$$

где $G(\cdot)$ — конечная мера на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Таким образом, применима теорема Карунена (теорема 10.13), где $f(t,\lambda) = e^{it\lambda}$ $(t, \lambda \in \mathbb{R})$ и выполнено условие (10.23). В самом деле, любую функцию из $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), G)$ аппроксимируем срезкой $f(\lambda)\mathbb{1}_{\{|\lambda| \leqslant a\}}$, которую приближаем в L^2 непрерывной функцией, имеющей одинаковые значения в точках a и $-a$, а затем приближаем функциями $e^{in\frac{\pi}{a}\lambda}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. □

Теперь мы **обратимся к изучению спектральных плотностей стационарных процессов**. Это очень важный объект, который характеризует, например, в физических системах, как мощность сигнала распределяется по различным гармоникам. Ограничимся рассмотрением процессов с дискретным временем.

Центрированный ортонормированный (в $L^2(\Omega)$) процесс $\varepsilon = \{\varepsilon(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ называется *белым шумом.* Легко видеть, что это стационарный в широком смысле процесс, имеющий спектральную плотность $f(\lambda) = 1/(2\pi)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Иначе говоря, подобно "белому свету", процесс ε можно рассматривать в виде смеси (в смысле спектрального представления) гармонических колебаний одинаковой интенсивности.

Теорема 11.10. *Стационарный в широком смысле центрированный процесс*

$$X = \{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$$

имеет спектральную плотность тогда и только тогда, когда найдутся числовая последовательность $\{c_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \in l^2$ *(т. е.* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$*) и белый шум* $\varepsilon = \{\varepsilon(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$*, заданный на* $L^2(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P})$ *(возможно расширение исходного* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*), такие, что*

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{11.15}$$

Процесс, допускающий представление (11.15), где ряд сходится в среднем квадратическом, называется *процессом скользящего среднего.* Говорят также, что процесс X получается с помощью *фильтра*, на вход которого подается белый шум ε. Фильтр называется *физически осуществимым*, если $c_k = 0$ для $k < 0$. Это соответствует тому, что значения процесса X в момент t определяются величинами ε_k с $k \leqslant t$ (т.е. $X(t)$ при каждом t не задается "будущими" значениями входящего процесса ε).

□ **Пусть выполнено** (11.15), где $\{c_k\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ описаны в условиях теоремы. Ряд сходится в $L^2(\widetilde{\Omega, \mathcal{F}, P})$ (если ε_k, $k \in \mathbb{Z}$, заданы на этом пространстве), т. к. $\sum\limits_{k=M}^{N} c_{t-k}\varepsilon_k - \sum\limits_{k=m}^{n} c_{t-k}\varepsilon_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0$ при $N, n \to \infty$ и $M, m \to -\infty$. Заметим, что $\mathsf{E} \sum\limits_{k=M}^{N} c_{t-k}\varepsilon_k = 0$, $N, M \in \mathbb{Z}\ (M \leqslant N)$. Далее, если $\zeta_{M,N} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta$, $\mathsf{E}\zeta_{M,N} = 0$, то $|\mathsf{E}\zeta - \mathsf{E}\zeta_{M,N}| \leqslant \mathsf{E}|\zeta - \zeta_{M,N}| \leqslant$ $\leqslant \|\zeta - \zeta_{M,N}\| \to 0$ $(N \to \infty,\ M \to -\infty)$, следовательно, $\mathsf{E}\zeta = 0$. Итак, $\mathsf{E}X_t = 0$ для $t \in \mathbb{Z}$. По равенству Парсеваля

$$r(s,t) = \left(\sum_k c_{s-k}\varepsilon_k, \sum_l c_{t-l}\varepsilon_l \right) = \sum_k c_{s-k}\bar{c}_{t-k} = \sum_j c_j \bar{c}_{-j-(s-t)} = R(s-t), \quad s,t \in \mathbb{Z}, \tag{11.16}$$

т. е. $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле процесс. Введем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\lambda}. \tag{11.17}$$

Ряд (11.17) сходится в $L^2[-\pi, \pi] = L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}[-\pi, \pi], \mathrm{mes})$, где mes – мера Лебега, поскольку $\{c_k\} \in l^2$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \overline{e^{it\lambda}} d\lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{для} \quad s = t, \\ 0 & \text{для} \quad s \neq t\ (s, t \in \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{11.18}$$

Тогда в том же пространстве $L^2[-\pi, \pi]$

$$\Phi(\lambda) e^{is\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{i(k+s)\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{s-j} e^{ij\lambda}. \tag{11.19}$$

По равенству Парсеваля из (11.19) и (11.18) имеем в силу (11.16)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda}|\Phi(\lambda)|^2\,d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\lambda)e^{is\lambda}\overline{\Phi(\lambda)e^{it\lambda}}d\lambda = \sum_j c_{s-j}\bar{c}_{t-j} = r(s,t). \tag{11.20}$$

Но $\Phi(\cdot) \in L^2[-\pi,\pi]$, т. е. $|\Phi(\cdot)|^2 \in L^1[-\pi,\pi]$. Итак, (11.20) показывает, что $f(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$, есть спектральная плотность процесса $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Обратно. Пусть $f(\cdot)$ — спектральная плотность процесса $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $f(\cdot) \in L^1[-\pi,\pi]$ и $f(\lambda) \geqslant 0$ п.в. по мере Лебега (для неотрицательной меры G имеем $G(B) = \int_B f(\lambda)\,d\lambda$). Обозначим $\Phi(\lambda) = \sqrt{f(\lambda)}$ ($\Phi(\lambda) = 0$, если $f(\lambda) < 0$). Тогда $\Phi(\lambda) \in L^2[-\pi,\pi]$ и, следовательно, учитывая, что $\{(2\pi)^{-1/2}e^{is\lambda},\ \lambda \in [-\pi,\pi]\},\ s \in \mathbb{Z}\}$, является полной и ортонормированной системой, получаем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{ik\lambda}, \tag{11.21}$$

где $\{c_k\} \in l^2$ и ряд (11.21) сходится в $L^2[-\pi,\pi]$. Тогда, снова пользуясь равенством Парсеваля, имеем

$$r(s,t) = R(s-t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda}f(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda}\Phi(\lambda)\overline{e^{it\lambda}\Phi(\lambda)}d\lambda = \sum_k c_{s-k}\bar{c}_{t-k}. \tag{11.22}$$

Возьмем $\Lambda = \mathbb{Z}$, пусть μ — считающая мера на σ-алгебре $\mathcal{B}$ всех подмножеств $\mathbb{Z}$ (т. е. σ-конечная мера, такая что $\mu(\{k\}) = 1,\ k \in \mathbb{Z}$). Пусть $f(t,\alpha) = c_{t-\alpha}$, где $t,\alpha \in \mathbb{Z}$, $\{c_k\} \in L^2(\Lambda,\mathcal{B},\mu)$. Тогда формула (11.22) может быть переписана в виде (10.21), и следовательно, по теореме 10.13 на, возможно расширенном, пространстве $(\widetilde{\Omega,\mathcal{F},P})$ существует центрированная ортогональная случайная мера $Z(\cdot)$, такая что

$$X_t = \int_\Lambda f(t,\alpha)Z(d\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{t-k}\varepsilon_k, \tag{11.23}$$

где $\varepsilon_k = Z(\{k\})$, а ряд в (11.23) сходится в $L^2(\Omega)$. При этом центрированные величины ξ_k, $k \in \mathbb{Z}$, будут не только ортогональны, но и ортонормированы, т. к. $\mathsf{E}|\varepsilon_k|^2 = \mu(\{k\}) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Замечание 11.11. Из доказательства теоремы 11.10 видно, что установлено не только существование спектральной плотности, но и найден ее явный вид, отвечающий представлению (11.15):

$$f(\lambda) = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{ik\lambda}\right|^2,\ \lambda \in [-\pi,\pi].$$

Теперь мы затронем очень важный **вопрос о статистическом оценивании спектральной плотности**.

Пусть $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ — центрированный, стационарный в широком смысле процесс с ковариационной функцией $R(n) = \mathsf{E}X_{n+k}\overline{X}_k$, $k,n \in \mathbb{Z}$. Формула (11.6) показывает, что функция $f_N(\lambda)$, введенная в (11.5), может рассматриваться в качестве **аппроксимации спектральной плотности** $f(\lambda)$ (когда последняя существует).

Естественно в выражение (11.5) **для** f_N **подставить вместо** $R(m)$ **статистическую оценку ковариационной функции, построенную по наблюдениям** $X_0, \dots, X_{N-1}$. Возьмем

$$\widehat{R}_N(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-m} \sum\limits_{k=0}^{N-m-1} X_{m+k}\overline{X}_k, & 0 \leqslant m \leqslant N-1, \\ \overline{\widehat{R}(m)} & \text{для} \quad -(N-1) \leqslant m < 0, \\ 0 & \text{для остальных} \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{11.24}$$

и определим

$$\widehat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} \widehat{R}_N(m) e^{-i\lambda m} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right).$$

Путем простых преобразований получаем

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-i\lambda k} \right|^2. \tag{11.25}$$

Это выражение называется *периодограммой*. Легко видеть, что

$$\mathsf{E}\widehat{f}_N(\lambda) = f_N(\lambda), \tag{11.26}$$

поскольку $\mathsf{E}\widehat{R}_N(m) = R(m)$ для m, $|m| \leqslant N-1$. Теперь заметим, что f_N можно записать следующим образом:

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R(k-l) e^{-i\lambda(k-l)} = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu(k-l)} f(\nu)\, d\nu e^{-i\lambda(k-l)} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i(\nu-\lambda)k} e^{-i(\nu-\lambda)l} f(\nu)\, d\nu =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(\nu-\lambda)k} \right|^2 f(\nu)\, d\nu = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(\nu-\lambda) f(\nu)\, d\nu, \tag{11.27}$$

где ядро Фейера

$$\Phi_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k} \right|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\sin(N\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)} \right)^2.$$

Учитывая, что $f(\cdot) \in L^1[-\pi, \pi]$, имеем для п.в. (по мере Лебега) λ

$$\int_{\pi}^{\pi} \Phi_N(\nu-\lambda) f(\nu)\, d\nu \to f(\lambda), \quad N \to \infty. \tag{11.28}$$

Из (11.26) и (11.28) получаем, что **периодограмма является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности**. Однако среднеквадратическая ошибка, т. е. величина $\mathsf{E}|\widehat{f}_N(\lambda) - f(\lambda)|^2$, с ростом N, как правило, не стремится

к нулю. Поэтому на практике используются сглаженные оценки $\widehat{f}_N^W$, т. е. оценки вида
$$\widehat{f}_N^W(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \nu)\widehat{f}_N(\nu)\, d\nu,$$
где *спектральные окна* $W_N(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, строятся так, чтобы

a) функция $W_N(\lambda)$ имела резкий максимум в окрестности точки 0;

b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda)\, d\lambda = 1$;

c) $\mathsf{E}|\hat{f}_N^W(\lambda) - f(\lambda)|^2 \to 0$ при $N \to \infty$ для $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

Например, **оценки Бартлета** строятся с помощью окон $W_N(\lambda) = a_N B(a_N\lambda)$, где
$$B_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\right|^2,\ B_N(0) = \frac{1}{2\pi},$$
а последовательность $a_N \nearrow \infty$, $a_N/N \to 0$ $(N \to \infty)$.

Заключительная часть этой лекции будет посвящена **классической задаче прогноза**. Пусть дан L^2-процесс $X = \{X(t),\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$. Требуется найти наилучшее приближение случайной величины $X(t)$ по норме $\|\cdot\|$ пространства $L^2(\Omega)$, основываясь на предыстории процесса X до момента $s < t$. Если считать, что мы располагаем всеми величинами, измеримыми относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_s = \sigma\{X(u),\, u \leqslant s,\, u \in T\}$, то нетрудно показать, что
$$\inf\{\|X(t) - y\| : y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)\} = \|X(t) - \mathsf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s)\|.$$
Однако, нахождение условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ является, как правило, нетривиальной задачей. **Если считать, что прогноз может основываться только на линейных комбинациях величин X_u с $u \leqslant s$, $u \in T$ (и пределах таких величин в пространстве $L^2(\Omega)$), то** задача упрощается и **говорят о линейном прогнозе**. При этом элементарные факты теории гильбертовых пространств позволяют не только решить поставленную задачу, но и показать ее роль в прояснении структуры стационарных процессов.

Введем пространство $H_s(X)$ для $s \in T$, как замыкание в среднем квадратическом линейной оболочки величин $X(u)$, $u \leqslant s$, $u \in T$, и положим
$$H_{-\infty}(X) := \cap_{s\in T} H_s(X),\ H(X) = L^2[X],$$
где $L^2[X]$ – замыкание в $L^2(\Omega)$ линейной оболочки всех величин X_u, $u \in T$. Очевидно, $H(X)$ – наименьшее подпространство $L^2(\Omega)$, содержащее все $H_s(X)$, $s \in T$. Итак, **задача линейного прогноза $X(t)$ по прошлому до момента s ставится, как задача наилучшего приближения** $X(t)$ (по норме пространства $L^2(\Omega)$) **элементами пространства $H_s(X)$.** *Ошибкой линейного прогноза* называется
$$\Delta(s,t) := \inf\{\|X(t) - g\| : g \in H_s(X)\}. \tag{11.29}$$

Напомним (легко доказать самостоятельно), что если L – подпространство гильбертова пространства H (с нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением) и $x \in H$, то $\inf\{\|x - g\| : g \in L\}$ достигется на единственном элементе $h = P_L x$, где P_L – ортопроектор в H на подпространство L.

Таким образом, решением поставленной выше задачи линейного прогноза является величина $P_s X(t)$, где P_s – ортопроектор в $H(X)$ на $H_s(X)$.

Процесс X называется *сингулярным* или *детерминированным*, если $H_{-\infty}(X) = H(X)$, т.е. $H_s(X) = H_t(X)$ при всех $s, t \in T$. Процесс X называется *регулярным* или *чисто недетерминированным*, если $H_{-\infty}(X) = 0$. **Покажем, как эти определения связаны с точностью линейного прогноза стационарного процесса, заданного на множестве $T = \mathbb{R}$ или $T = \mathbb{Z}$. Всюду далее будем считать процесс X центрированным.** Тогда $\mathsf{E}Y = 0$ для любого $Y \in H(X)$, поскольку Y сколь угодно точно аппроксимируется в $L^2(\Omega)$ элементами линейной оболочки X, имеющими нулевое среднее.

Покажем, что

$$\Delta(s,t) = \Delta(s+u, t+u) \quad \text{для всех } s, t, u \in T. \tag{11.30}$$

Достаточно заметить, что для $y = c_1X(s_1)+\ldots+c_nX(s_n) \in H_s(X)$, где $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in T$, $s_k \leqslant s$ и $z = c_1X(s_1+u)+\ldots+c_nX(s_n+u) \in H_{s+u}(X)$ имеем $\|X(t)-y\|^2 = \|X(t+u)-z\|^2$ (запишите обе части равенства через ковариационную функцию). Формула (11.30) позволяет положить

$$\delta(t) := \Delta(s, s+t), \ t \in T.$$

Обращаясь к определению (11.29), видим, что $\delta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ ($t \in T$) и

$$\delta(v) \leqslant \delta(u) \quad \text{для } v \leqslant u \ (v, u \in T). \tag{11.31}$$

Неравенство (11.31) очевидно, если учесть, что левая часть согласно (11.29) получается, как нижняя грань по большему множеству.

Теорема 11.12. *Стационарный процесс X является*

1) сингулярным тогда и только тогда, когда $\delta(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 > 0$, $t_0 \in T$ (тогда $\delta(t) = 0$ при всех $t \in T$),

2) регулярным тогда и только тогда, когда

$$\delta(t) \to R(0) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{11.32}$$

где R – ковариационная функция X.

□ 1) **Если процесс X сингулярен**, то $X(t) \in H_t(X) = H_s(X)$ и, следовательно, $\Delta(s,t) = 0$ при любых $s, t \in T$.

Обратно. Пусть $\delta(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 > 0$ ($t_0 \in T$). Тогда $X(s+t_0) \in H_s(X)$ для любого $s \in T$. В силу (11.31) имеем $X(t) \in H_s(X)$ для $t \leqslant s+t_0$. Отсюда следует, что $H_t(X) = H_s(X)$ при $t \leqslant s + t_0$. Ввиду произвольности s видим, что процесс X сингулярен.

2) **Пусть выполнено** (11.32). Для $s, t \in T$

$$R(0) = \|X(t)\|^2 = \|P_sX(t)\|^2 + \|X(t) - P_sX(t)\|^2 = \|P_sX(t)\|^2 + \delta(t-s). \tag{11.33}$$

Поэтому $\|P_sX(t)\| \to 0$ при $s \to -\infty$ для каждого $t \in T$. Теперь заметим, что если L_1, L_2 – подпространства гильбертова пространства H и $L_1 \subset L_2$, то $P_{L_1}x \leqslant P_{L_2}x$ для любого $x \in H$. Таким образом, $\|P_{-\infty}X(t)\| \leqslant \|P_sX(t)\|$ для каждых $s, t \in T$. Следовательно, $P_{-\infty}X(t) = 0$, т.е. $X(t) \perp H_{-\infty}(X)$ для $t \in T$, откуда $H(X) \perp H_{-\infty}(X)$. Поскольку $H_{-\infty}(X) \subset H(X)$, получаем, что $H_{-\infty} = 0$.

Обратно. Пусть $H_{-\infty} = 0$. Учитывая (11.33), видим, что требуемое утверждение обеспечивает

Лемма 11.13. *Пусть H_t, $t \in T$ – убывающее семейство подпространств гильбертова пространства H, т.е. $H_s \subset H_t$ при $s \leqslant t$, $s, t \in T$. Если $\cap_{s \in T} H_s = 0$, то $P_sx \to 0$ при $s \to -\infty$ для каждого $x \in H$, где P_s – ортопроектор в H на H_s.*

□ Поскольку $\|P_s x\| \leqslant \|P_t x\|$ для каждого $x \in H$ при $s \leqslant t$, то достаточно показать, что $\|P_{t_k} x\| \to 0$ при $k \to \infty$, где $t_{k+1} < t_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\lim_{k\to-\infty} t_k = -\infty$. Обозначим $L_k := H_{t_k} \ominus H_{t_{k+1}}$, т.е. $H_{t_{k+1}} \oplus L_k = H_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in H$ и $m > k$ имеем

$$P_{t_k} x = P_{t_m} x + \sum_{j=k}^{m-1} Q_j x$$

(Q_j – ортопроектор в H на L_j). Отсюда

$$\|P_{t_k} x\|^2 = \|P_{t_m} x\|^2 + \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2.$$

Следовательно, $\sum_{j=0}^{\infty} \|Q_j x\|^2 \leqslant \|P_{t_0} x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Таким образом, при $m > k$ видим, что

$$\|P_{t_k} x - P_{t_m} x\|^2 = \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2 \to 0, \quad \text{если } k, m \to \infty$$

(очевидно, можно брать и $k \geqslant m$). В силу полноты H существует элемент $y = \lim\limits_{k\to\infty} P_{t_k} x$. Поскольку $P_{t_k} x \in H_{t_m}$ при $k \geqslant m$, то $y \in H_{t_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Получаем, что $y \in \cap_{m=0}^{\infty} H_{t_m}$, но $\cap_{m=0}^{\infty} H_{t_m} = \cap_{t\in T} H_t$ в силу монотонности семейства H_t. Поэтому $y = 0$. □

Тем самым, теорема 11.12 также доказана. □

Теорема 11.14 (Вольд). *Центрированный стационарный (в широком смысле) процесс $X = \{X(t),\, t \in T\}$, где $T = \mathbb{R}$ или $T = \mathbb{Z}$ допускает представление вида*

$$X(t) = M(t) + N(t),\ t \in T, \tag{11.34}$$

где $M = \{M(t),\, t \in T\}$ – сингулярный, а $N = \{N(t),\, t \in T\}$ – регулярный процессы, причем $M \perp N$, т.е. $M(s) \perp N(t)$ для $s, t \in T$. Кроме того, процессы M и N стационарны и центрированы. Указанное разложение процесса X единственно, если потребовать условие подчиненности $M(t) \in H_t(X)$ (тогда и $N(t) \in H_t(X)$) при каждом $t \in T$.

□ Положим $M(t) = P_{-\infty} X(t)$, и пусть $N(t) = X(t) - M(t)$, $t \in T$, что обеспечивает (11.34). По определению M и N имеем $M(t) \in H_{-\infty}(X)$ и $N(t) \perp H_{-\infty}(X)$ для $t \in T$. Следовательно, $M \perp N$. Из (11.34) вытекает, что $X(t) \in H_t(M) \oplus H_t(N)$. Поэтому $H_t(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$. С другой стороны, $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H_t(X)$. Отсюда $H_t(M) \subset H_t(X)$ и тогда в силу (11.34) имеем $H_t(N) \subset H_t(X)$ при $t \in T$. Таким образом, $H_t(M) \oplus H_t(N) \subset H_t(X)$ и получаем

$$H_t(X) = H_t(M) \oplus H_t(N),\ t \in T. \tag{11.35}$$

Теперь заметим, что $H_t(N) \perp H_{-\infty}(X)$ при $t \in T$, откуда $H_{-\infty}(N) \perp H_{-\infty}(X)$. В то же время $H_t(N) \subset H_t(X)$, поэтому $H_{-\infty}(N) \subset H_{-\infty}(X)$. Итак, $H_{-\infty}(N) = 0$, т.е. N – регулярный процесс. Мы знаем, что $H_t(M) \subset H_{-\infty}(X)$, $t \in T$. Из (11.35) следует, что $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$. Учитывая, что $H_t(N) \perp H_{-\infty}(X)$, получаем $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M)$, $t \in T$. Следовательно, $H_t(M) = H_{-\infty}(X)$, $t \in T$, и M – сингулярный процесс.

Докажем, что M, N – стационарные процессы. Для этого введем в $H(X)$ *операторы сдвига* S_u, $u \in T$, положив

$$S_u(c_1 X(t_1) + \ldots + c_n X(t_n)) = c_1 X(t_1 + u) + \ldots + c_n X(t_n + u),$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $t_k \in T$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение корректно. Действительно, если $\sum_{k=1}^n c_k X(t_k) = \sum_{j=1}^m d_j X(s_j)$, где $d_j \in \mathbb{C}$, $s_j \in T$, $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, то в силу стационарности X имеем для $u \in T$

$$0 = \| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k) - \sum_{j=1}^m d_j X(s_j) \|^2 = \| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k + u) - \sum_{j=1}^m d_j X(s_j + u) \|^2.$$

Аналогично проверяется, что при каждом $u \in T$

$$(S_u x, S_u y) = (x, y), \ x, y \in \mathcal{L}in(X_t, \, t \in T),$$

т.е. S_u – изометрический оператор на линейной оболочке величин X_t, $t \in T$, причем $\|S_u x\| = \|x\|$ для $x \in \mathcal{L}in(X(t), \, t \in T)$, $u \in T$. Следовательно, S_u однозначно продолжается до изометрического оператора на $H(X)$, который также обозначается S_u.

Легко видеть (сперва проверяется на $\mathcal{L}in(X(t), \, t \in T)$), что $(S_u)_{u \in T}$ – группа операторов в $H(X)$, т.е.

$$S_{u+v} = S_u S_v \quad \text{для } u, v \in T,$$

где $S_0 = I$ – тождественное отображение. Итак, **имеем группу изометрических** (значит линейных) **операторов** $(S_u)_{u \in T}$ **на** $H(X)$.

Лемма 11.15. *Для любых* $u, v \in T$

$$S_u H_v(X) = H_{u+v}(X), \quad S_u H_{-\infty}(X) = H_{-\infty}(X), \tag{11.36}$$

$$P_{u+v} S_u = S_u P_v, \quad P_{-\infty} S_u = S_u P_{-\infty}, \tag{11.37}$$

где P_t *– ортопроектор в* $H(X)$ *на* $H_t(X)$*,* $t \in T \cup \{-\infty\}$.

□ Для $u, v \in T$, очевидно, $S_u(\mathcal{L}in(X(t), \, t \leqslant v, t \in T)) \in H_{u+v}(X)$, поэтому $S_u H_v(X) \subset H_{u+v}(X)$. Учитывая, что $S_u S_{-u} = I$, имеем $H_{u+v}(X) = S_u S_{-u} H_{u+v}(X) \subset S_u H_v(X)$. Первое равенство в (11.36) доказано. Если $x \in H_{-\infty}(X)$, то $x \in H_t(X)$ для всех $t \in T$. По доказанному $S_u x \in H_{t+u}(X)$ для любого $t \in T$. Следовательно, $S_u x \in H_{-\infty}(X)$, т.е. $S_u H_{-\infty}(X) \subset H_{-\infty}(X)$. Поэтому $H_{-\infty}(X) = S_u S_{-u} H_{-\infty}(X) \subset S_u H_{-\infty}(X)$, что завершает доказательство второго неравенства в (11.36).

В силу линейности операторов S_u, P_v, $u, v \in T$, достаточно проверить совпадение результатов действия на $X(t)$, $t \in T$, операторов, фигурирующих в равенствах (11.37). Для $u, v, t \in T$ имеем $P_{u+v} S_u X(t) = P_{u+v} X(t+u)$. С другой стороны, имеем $X(t) = y_v(t) + z_v(t)$, где $y_v(t) = P_v X(t) \in H_v(X)$ и $z_v(t) \perp H_v(X)$. Далее, $X(t+u) = S_u X(t) = S_u y_v(t) + S_u z_v(t)$, где $S_u y_v(t) \in H_{u+v}(X)$ и для любого $h \in H_{u+v}(X)$ в силу первого равенства (11.36) имеем $h = S_u g$, где $g \in H_v(X)$. Поэтому

$$(h, S_u z_v(t)) = (g, z_v(t)) = 0.$$

Если гильбертово пространство $H = L \oplus L^\perp$ ($L^\perp$ – ортогональное дополнение к пространству L), то любой элемент $x \in H$ единственным образом записывается в виде $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$ (тогда $y = P_L x$, где P_L – ортопроектор в H на L). Поэтому, $S_u P_v X(t) = S_u y_v(t) = P_{u+v} X(t+u)$. Первое равенство в (11.37) доказано. Аналогично, $P_{-\infty} S_u X(t) = P_{-\infty} X(t+u)$, а $X(t) = y_{-\infty}(t) + z_{-\infty}(t)$, где $y_{-\infty} \in H_{-\infty}(X)$ и $z_{-\infty}(t) \perp H_{-\infty}(X)$. Тогда $X(t+u) = S_u X(t) = S_u y_{-\infty}(t) + S_u z_{-\infty}(t)$. Поскольку $S_u y_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$ и $S_u z_{-\infty}(t) \perp H_{-\infty}(X)$ (учли второе равенство (11.36)) получаем $S_u P_\infty X(t) = S_u y_{-\infty}(t) = P_{-\infty} X(t+u)$. □

Продолжим доказательство теоремы 11.14. Поскольку $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H(X)$, то $\mathsf{E}M(t) = 0$, и, следовательно, $\mathsf{E}N(t) = 0$, $t \in T$. Таким образом, M и N – **центрированные процессы**. Для $t, u, v \in T$, пользуясь леммой 11.15 и изометричностью оператора S_u, имеем

$$\begin{aligned}(M(v+u), M(t+u)) &= (P_{-\infty}X(v+u), P_{-\infty}X(t+u)) = (P_{-\infty}S_uX(v), P_{-\infty}S_uX(t)) = \\ &= (S_uP_{-\infty}X(v), S_uP_{-\infty}X(t)) = (P_{-\infty}X(v), P_{-\infty}X(t)) = (M(v), M(t)).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$(N(v+u), N(t+u)) = (X(v+u) - M(v+u), X(t+u) - M(t+u)) =$$

$$= (X(v), X(t)) - (P_{-\infty}S_uX(v), S_uX(t)) - (S_uX(v), P_{-\infty}S_uX(t)) + (M(v), M(t)) =$$

$$= (X(v), X(t)) - (M(v), X(t)) - (X(v), M(t)) + (M(v), M(t)) =$$

$$= (X(v) - M(v), X(t) - M(t)) = (N(v), N(t)).$$

Докажем единственность разложения (11.34). А именно, допустим $X(t) = U(t)+V(t)$, где $U = \{U(t),\, t \in T\}$, $V = \{V(t),\, t \in T\}$ – соответственно сингулярный и регулярный процессы, причем $U \perp V$ и $U(t), V(t) \in H_t(X)$, $t \in T$. Тогда получаем

$$H_t(X) = H_t(U) + H_t(V) = H(U) \oplus H_t(V),\ t \in T.$$

Следовательно,

$$H_{-\infty}(X) = \cap_{t\in T}(H(U) \oplus H_t(V)) = H(U) \oplus \cap_{t\in T}H_t(V) = H(U) + 0 = H(U).$$

Таким образом,

$$M(t) = P_{H_{-\infty}(X)}X(t) = P_{H(U)}X(t) = P_{H(U)}U(t)+P_{H(U)}V(t) = P_{H(U)}U(t)+0 = U(t),\ t \in T.$$

Теорема доказана. □

Замечание 11.16. Разложение (11.34) было впервые получено Вольдом для стационарного процесса с дискретным временем. Крамером было доказано, что любой центрированный L^2-процесс (необязательно стационарный) X, заданный на множестве $T \subset \mathbb{R}$, допускает разложение на ортогональные компоненты, одна из которых сингулярна, а другая – регулярна. Условие подчиненности (см. теорему 11.14) обеспечивает единственность упомянутого разложения. Этот результат Крамера был установлен нами при доказательстве теоремы 11.14.

Отметим также, что лемма 11.15 позволяет немедленно получить соотношение (11.30):

$$\begin{aligned}\Delta(s+u, t+u) &= \|X(t+u) - P_{s+u}X(t+u)\| = \|S_uX(t) - P_{s+u}S_uX(t)\| = \\ &= \|S_uX(t) - S_uP_sX(t)\| == \|X(t) - P_sX(t)\| = \Delta(s,t).\end{aligned}$$

Белый шум $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ называется *обновляющим процессом* для центрированного L^2-процесса $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, если $H_n(X) = H_n(\varepsilon)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Описание всех регулярных процессов с дискретным временем дает

Теорема 11.17. *Для того, чтобы невырожденный центрированный стационарный процесс $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись обновляющий процесс $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ и последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2$, такие, что п.н.*

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{11.38}$$

где ряд сходится в среднем квадратическом.

□ **Пусть** X – **регулярный процесс**. Легко видеть, что для каждого $m \in \mathbb{Z}$ пространтство $H_m(X)$ состоит из замыкания в $L^2(\Omega)$ элементов вида $h_{m-1} + cX(m)$, где $h_m \in H_{m-1}(X)$, $c \in \mathbb{C}$. Поскольку $X(m) = g_{m-1} + z_m$, где $g_{m-1} \in H_{m-1}(X)$ и $z_m \perp H_{m-1}(X)$, то H_{m-1} представляет собой замыкание в $L^2(\Omega)$ злементов вида $h_{m-1} + cz_{m-1}$, а значит, в точности состоит из таких элементов, где $h_{m-1} \in H_{m-1}(X)$, $c \in \mathbb{C}$ (рассмотрите, какой вид будет иметь предел фундаментальной последовательности). Заметим, что $z_m \neq 0$ (0 – класс функций в $L^2(\Omega)$, равных 0 п.н.). Иначе $H_{m-1}(X) = H_m(X)$ и в силу (11.36) получили бы $H_{n-1}(X) = H_n(X)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, что противоречило бы регулярности. Выберем $\xi_n = z_n/\|z_n\|$ и воспользуемся рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 11.13. А именно, для фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ возьмем последовательность $t_k = n - k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. При этом подпространство $L_k := H_{t_k} \ominus H_{t_{k+1}}$ порождается вектором ξ_{n-k} ($k \in \mathbb{Z}_+$). Поскольку $\|P_{t_k} X(n)\| \to 0$, $k \to \infty$, приходим к равенству типа (11.38), в котором

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|X_n\|^2 < \infty.$$

Точнее говоря, (11.38) доказано для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{Z}$, поэтому коэффициенты c_k, $k \in \mathbb{Z}$, вообще говоря, зависят от n. Другими словами, пока лишь доказано, что

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} \xi_{n-k},$$

где ряд сходится в $L^2(\Omega)$ и $c_k^{(n)} = (X_n, \xi_{n-k})$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Проще всего перейти к другому базису в $H(X)$. А именно, положим $\varepsilon_k = S_k \xi_0$, $k \in \mathbb{Z}$ (по-прежнему, S_k – оператор сдвига в $H(X)$). Учитывая (11.36), видим, что $\varepsilon_k \in H_k(X)$ и $\varepsilon_k \perp H_{k-1}(X)$. Кроме того, $\|varepsilon_k\| = \|xi_0\| = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку одномерное подпространство $H_k(X) \ominus H_{k-1}(X)$ порождается вектором ξ_k, то, следовательно, $\varepsilon_k = \alpha_k \xi_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\{\varepsilon_k\}$ – обновляющий процесс для процесса X. В итоге

$$X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} \alpha_{0-k} \varepsilon_{0-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{-k}.$$

В силу непрерывности и линейности операторов S_n ($n \in \mathbb{Z}$), образующих группу, получаем

$$X_n = S_n X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n \varepsilon_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n S_{-k} \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{n-k} \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

Обратно. Даже если $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ – произвольный белый шум (т.е. необязательно обновляющий процесс для X), то (11.38) показывает, что X – центрированный стационарный процесс, причем $H_n(X) \subset H_n(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $H_{-\infty}(X) \subset H_n \varepsilon$

для любого $n \in \mathbb{Z}$. Но $\varepsilon_{n+1} \perp H_n(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому $z_n \perp H_{-\infty}(\varepsilon)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. В то же время ε_n – базис в $H(X)$. Следовательно, $H_{-\infty} = 0$. □

Таким образом, **формула** (11.38) **показывает, что регулярный стационарный процесс с дискретным временем задается физически осуществимым фильтром на вход которого подается белый шум**. Для произвольного центрированного стационарного процесса $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ разложение Вольда приобретает вид

$$X_n = M_n + N_n = M_n + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{11.39}$$

где M_n – сингулярная составляющая, $\{\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – обновляющий процесс для регулярной компоненты N_n, $(n \in \mathbb{Z})$, а $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$. Учитывая, что $P_{H_m(X)} M_{n+m} = M_{n+m}$ и $H_m(X) = H_m(\varepsilon)$ для $m, n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \mathsf{E}|X_{n+m} - P_{H_m(X)} X_{n+m}|^2 = \mathsf{E}|N_{n+m} - P_{H_m(X)} N_{n+m}|^2 = \\ &= \mathsf{E}|N_{n+m} - P_{H_m(\varepsilon)} N_{n+m}|^2 == \mathsf{E}|\sum_{k=0}^{n-1} c_k \varepsilon_{n+m-k}|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2. \end{aligned} \tag{11.40}$$

Формула (11.40) еще раз показывает (см. (11.32)), что для регулярного центрированного стационарного процесса $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, т.е. совпадающего с компонентой $\{N_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, имеем при $n \to \infty$

$$\delta_n^2 \to \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \mathsf{E}|N_0|^2 = \mathsf{E}|X_0|^2 = R(0),$$

где R – ковариационная функция X.

Из теоремы 11.17 и замечания 11.15 вытекает, что регулярный центрированный стационарный процесс, т.е. процесс вида (11.38), имеет спектральную плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Исчерпывающее описание таких плотностей содержит

Теорема 11.18 (Колмогоров). *Стационарный центрированный процесс*

$$X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$$

является регулярным тогда и только тогда, когда его спектральная плотность $f(\lambda)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

Доказательство этого результата основано на описании граничных свойств аналитических в единичном круге функций класса Харди $\mathcal{H}_2$ (см. [**?**, с.]).

Дополнения и упражнения.

Стационарными будем называть далее процессы, стационарные в широком смысле. Начнем с пяти примеров стационарных и нестационарных процессов.

Упр. 11.1. Пусть $X = \{X(t) = \xi e^{i(\eta t + \nu)},\ t \in \mathbb{R}\}$, где действительные случайные величины ξ, η, ν таковы, что ν равномерно распределена на $[0, 2\pi]$ и не зависит от (ξ, η), а $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$. Убедитесь, что X дает пример центрированного стационарного процесса с ковариационной функцией вида (11.13), где мера $G = \mathsf{E}\xi^2 F$, а F – распределение η.

Упр. 11.2. В условиях предыдущего упражнения положим

$$Y = \{Y(t) = \xi \cos(\eta t + \nu),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Проверьте, что Y – стационарный процесс. Если $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ – стационарный комплекснозначный процесс, то можно ли утверждать, что $\{\operatorname{Re} X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ и $\{\operatorname{Im} X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ – стационарные процессы?

Упр. 11.3. [телеграфная волна] Пусть $\{N_t,\, t \geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс, имеющий постоянную интенсивность $\lambda > 0$. Пусть случайная величина ζ не зависит от $\{N_t,\, t \geqslant 0\}$ и $P(\zeta = -1) = P(\zeta = 1) = 1/2$. Введем процесс, называемый *телеграфной волной*, положив

$$X(t, \omega) = \zeta(\omega)(-1)^{N_t(\omega)},\ t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega. \tag{11.41}$$

Нарисуйте график траекторий этого процесса. Найдите $\mathsf{E}X(t)$ и $\operatorname{cov}(X(s), X(t))$, $s, t \geqslant 0$ (сопоставьте ответ с упражнением 3.19).

Упр. 11.4. (обобщение упражнения 11.3). Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ – последовательность н.о.р. действительных случайных величин, независящая от пуассоновского процесса $\{N_t,\, t \geqslant 0\}$, имеющего с вероятностью 1 единичные скачки в моменты $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ (см. теорему 8.5). Положим $X(t, \omega) = \zeta_k(\omega)$ при $\tau_k(\omega) \leqslant t < \tau_{k+1}(\omega)$, где $k = 0, 1, \ldots$ ($\tau_0 = 0$). Если в последовательности $\{\tau_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ найдутся совпадающие точки (что возможно лишь с вероятностью 0), то пусть $X(t, \omega) = 0$ для $t \geqslant 0$. Считая $\mathsf{E}\zeta_0^2 < \infty$, найдите ковариационную функцию процесса $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$.

Упр. 11.5. [дробовой шум] Используя обозначения и предположения упражнения 11.4, для кусочно непрерывной финитной функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим *процесс дробового шума*

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \phi(t - \tau_k),\ t \in \mathbb{R}, \tag{11.42}$$

где ряд сходится п.н. (докажите). Найдите ковариационную функцию r этого процесса и, вычислив $\lim_{s \to \infty} r(s, s+t)$, убедитесь, что возникает "асимптотическая" стационарность в том смысле, что этот предел не зависит от s. На какой более широкий класс функций ϕ обобщается (11.42)?

Процесс (11.42) для $t \geqslant 1$ при $\zeta_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и убывающей на $[0, \infty)$ функции $\phi(\cdot) \geqslant 0$, $\phi(0) = 1$, допускает следующую интерепретацию. В радиолампе в моменты τ_k, $k \in \mathbb{N}$ от катода к аноду поступают электроны. При этом напряжение анода в момент τ_k возрастает скачком на величину ζ_k, а затем начинает убывать в соответствии с функцией ϕ. Скачок напряжения от прихода очередного электрона суммируется с остаточным напряжением. Тогда $X(t)$ – напряжение на аноде в момент t. Обобщения процесса (11.42), в том числе и *поля дробового шума*, играют важную роль в построении различных моделей реальных процессов (см., напр., [**?**], [**?**]).

Упр. 11.6. Найдите спектральную плотность процесса Орнштейна – Уленбека (см. упр. 3.19).

Упр. 11.7. Приведите пример (в связи с теоремой 11.8) неотрицательно определенной функции $R(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывной всюду, кроме точки $t = 0$.

Упр. 11.8. Пусть $h_1(t), \dots, h_n(t)$ – комплекснозначные функции, заданные на множестве T. Докажите, что $r(s,t) = \sum_{j=1}^n h_j(s)\overline{h_j(t)}$, $s,t \in T$, является неотрицательно определенной функцией. Укажите процесс, имеющий эту ковариационную функцию. Используйте этот пример для выполнения упр. 10.20.

Упр. 11.9. Докажите, что если $P_n(z_1, \dots, z_m)$ – многочлен n-степени (от m переменных) с положительными коэффициентами и $r_k(s,t)$, $k = 1, \dots, m$, $s,t \in T$ – ковариационные функции, то $P_n(r_1(s,t), \dots, r_m(s,t))$ также является ковариационной функцией. Дайте явный пример процесса $\{X(t),\, t \in T\}$ с этой ковариационной функцией.

Упр. 11.10. Пусть $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ – стационарный процесс со средним a и ковариационной функцией $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что при $N \to \infty$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} a \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R(k) \to 0. \tag{11.43}$$

Упр. 11.11. Пусть при условиях предыдущего упражнения

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} R(k-j) \equiv \frac{1}{N}\sum_{|k|\leqslant N-1} R(k)(1-|k|/N) \leqslant cN^{-\gamma} \tag{11.44}$$

для некоторых $c, \gamma > 0$ и всех $N \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \to 0 \;\text{ п.н. при } N \to \infty. \tag{11.45}$$

Покажите, что условие (11.44) выполнено, если $R(n) = O(n^{-\gamma})$ при $n \to \infty$.

Теорема Д11.12 (Гапошкин). *Пусть $\{X(n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ – стационарный процесс со средним $a = 0$ и ковариационной функцией $R(n)$, $n \in \mathbb{N}$ (пусть $R(0) = 1$). Тогда (11.45) имеет место в том и только том случае, когда $G(\{0\}) = 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0<|\lambda|\leqslant 2^{-n}} Z(d\lambda) = 0 \;\text{ п.н.,}$$

где Z – ортогональная случайная мера, фигурирующая в спектральном представлении (11.12), а G – ее структурная мера.

Доказательство этого результата основано в [?] на представлении сумм $k^{-1}\sum_{j=1}^k X_j$ для $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$) в виде $\int_{|\lambda|\leqslant 2^{-n}} Z(d\lambda) + \psi_k$, где $\lim_{k\to\infty}\psi_k = 0$ п.н. и в $L^2(\Omega)$.

Упр. 11.13. Пусть $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – центрированная действительная гауссовская стационарная последовательность с ковариационной функцией $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что условие

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) \to 0, \quad N \to \infty, \tag{11.46}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы оценка $\widehat{R}_N(m)$, введенная в (11.24) была состоятельной в среднем квадратическом, т.е. для $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathsf{E}|\widehat{R}_N(m) - R(m)|^2 \to 0 \;\text{ при }\; N \to \infty.$$

Упр. 11.14. Пусть $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ – процесс скользящего среднего вида (11.15). Дополнительно потребуем, чтобы $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ и ε_k, $k \in \mathbb{Z}$, были н.о.р. величинами, имеющими $\mathsf{E}\varepsilon_0^4 < \infty$. Пусть $\widehat{f}_N(\lambda)$ – периодограмма (11.25). Найдите $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{cov}(\widehat{f}_N(\lambda), \widehat{f}_N(\nu))$ для частот $\lambda, \nu \in [-\pi, \pi]$.

Упр. 11.15. Пусть Z – ортогональная случайная мера, отвечающая процессу Орнштейна – Уленбека с параметрами $\alpha, \beta > 0$ (см. упражнение 3.19). Докажите, что процесс

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{i\lambda} \cdot \frac{i\lambda + \beta}{\alpha} Z(d\lambda),\ t \geqslant 0, \tag{11.47}$$

(по непрерывности полагаем $(e^{it\lambda} - 1)/i\lambda = t$ при $\lambda = 0$) являяется винеровским процессом (непрерывность модификации процесса $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ легко получается с помощью теоремы Колмогорова Д2.22).

Интересно отметить, что (11.47) дает возможность построения винеровского процесса, отправляясь от процесса Орнштейна – Уленбека, а упражнение 3.19 показывает, как процесс Орнштейна – Уленбека выражается через винеровский процесс. В лекции 13 мы рассмотрим также стохастическое дифференциальное уравнение Ланжевена, связывающее (при определенных условиях) эти два замечательных процесса.

Пользуясь упражнением 10.6, можем переписать (11.47) в виде (сравните с примером Д10.7)

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{i\lambda} V(d\lambda),\ t \geqslant 0, \tag{11.48}$$

где ортогональная случайная мера V на полукольце $\mathcal{K}$, фигурирующем в упражнении 10.6, задается формулой (10.28) с функцией $h(\lambda) = (i\lambda + \beta)/\alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание Д11.16. Согласно теореме 4.1 траектории винеровского процесса п.н. недифференцируемы ни в одной точке $t \in \mathbb{R}_+$. Легко видеть (докажите), что в каждой точке $t \in \mathbb{R}_+$ не существует производной $W(t)$ даже в смысле сходимости по вероятности. Тем не менее, если **формально** продифференцировать по t равенство (11.48), получим так называемый "*белый шум*"

$$\dot{W}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} V(d\lambda). \tag{11.49}$$

Это название связано с тем, что формально получена смесь гармонических колебаний $e^{it\lambda}$; каждое из которых входит в (11.49) с одинаковой интенсивностью, поскольку структурная для V мера есть мера Лебега. Точный смысл этому "белому шуму" удается придать благодаря теории обобщенных случайных процессов, см. [?], введение в эту область содержит [?].

Результаты, изложенные в лекции 11, распространяются на процессы с векторными значениями, а также на случайные поля.

Матричная функция $C(s,t) = (C_{jk}(s,t))_{j,k=1}^m$, $s,t \in T$ с комплекснозначныыми элементами называется *неотрицательно* (или *положительно*) *определенной* если для всех $n \in \mathbb{N}$ и любых $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^m$, $t_1, \ldots, t_n \in T$

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j^* C(t_j, t_k) z_k \geqslant 0, \tag{11.50}$$

$*$ обозначает транспонирование и комплексное сопряжение всех элементов.

Векторный процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ называется L^2-процессом, если $\mathsf{E}\|X(t)\|^2 < \infty$ для всех $t \in T$. Здесь и далее норма в комплексном (в частности, действительном) евклидовом пространстве

$$\|z\| = (z,z)^{1/2}, \ \text{ где } \ (z,w) = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w}_k \ \text{ для } \ z, w \in \mathbb{C}^m. \tag{11.51}$$

Определим *векторную функцию среднего* и *матричную ковариационную* (корреляционную) *функцию* L^2-процесса X, положив

$$a(t) = \mathsf{E}X(t) \in \mathbb{C}^m,\ r(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - a(s))(X(t) - a(t))^*. \tag{11.52}$$

Упр. 11.17. Докажите, что матричная функция $R(s,t)$, $s,t \in T$ (с комплексными элементами) является ковариационной функцией некоторого векторного L^2-процесса $X = \{X(t),\ t \in T\}$ тогда и только тогда, когда она неотрицательно определена.

Пусть T – линейное пространство, L^2-процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ называется *стационарным в широком смысле* или *однородным*, если

$$a(t) = a \in \mathbb{C}^m,\ r(s,t) = R(s-t),\ s,t \in T. \tag{11.53}$$

Матричная функция $C(t)$, $t \in T$, называется *неотрицательно определенной*, если неотрицательно определена функция $r(s,t) := C(s-t)$, $s,t \in T$.

Всюду далее будем рассматривать центрированные процессы (и поля). Говорят, что последовательность векторов $\varepsilon(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, со значениями в $\mathbb{C}^m$ является *белым шумом* (для процессов с непрерывным временем этот термин, как отмечалось выше, имеет более сложный смысл), если в (11.53)

$$a = 0,\ R(0) = I,\ R(n) = 0 \ \text{ при } n \neq 0, \tag{11.54}$$

здесь I – единичная матрица m-го порядка.

(Векторный) *процесс скользящего среднего* вводится формулой

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \varepsilon(n-k),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{11.55}$$

где $\{\varepsilon(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ – белый шум, A_k, $k \in \mathbb{Z}$ – матрицы (операторы), отображающие $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^m$. Ряд в (11.55) понимается, как сходящийся в среднем квадратическом.

Упр. 11.18. Докажите, что для сходимости в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ряда (11.55) достаточно, чтобы $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 < \infty$, где $|A| := (\mathrm{Tr}AA^*)^{1/2} = \left(\sum_{j,q=1}^{m} |a_{jq}|^2\right)^{1/2}$ для $A = (a_{jq})_{j,q=1}^{m}$. Найдите ковариационную функцию векторного процесса скользящего среднего.

Если T – метрическое пространство с метрикой ρ, то L^2-процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ называется *непрерывным в среднем квадратическом в точке* $t \in T$, когда

$$\mathsf{E}\|X(s) - X(t)\|^2 \to 0 \ \text{ при } \rho(s,t) \to 0. \tag{11.56}$$

Непрерывность в среднем квадратическом на T означает выполнение (11.56) в каждой точке $t \in T$.

Докажите самостоятельно, что справедлива

Теорема Д11.19. *Функция $R(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, является ковариационной функцией однородного, непрерывного в среднем квадратическом комплекснозначного случайного поля $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}^d\}$ тогда и только тогда, когда*

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,\lambda)} G(d\lambda),\ \ t \in \mathbb{R}^d, \tag{11.57}$$

где G – некоторая конечная неотрицательная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. При этом мера G определяется однозначно.

Аналогично может быть переформулирована теорема 11.1.

Спектральное представление поля X, фигурирующего в теореме Д11.19, по ортогональной случайной мере Z со структурной мерой G играет важную роль при доказательстве усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) для однородных случайных полей. Этому направлению посвящены исследования В.Ф. Гапошкина.

Теорема Д11.20 (Гапошкин). *Пусть $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}^n\}$ – центрированное непрерывное в среднем квадратичном случайное поле с ковариационной функцией $R(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ (нормированное так, что $R(0) = 1$). Если*

$$\int_{0<|\lambda|\leqslant 1} \Big(\prod_{k=1}^{n} \log\log(3 + |\lambda_k|^{-1})\Big)^2 G(d\lambda) < \infty,$$

где G – спектральная мера, то при $T_1 \to \infty, \dots, T_n \to \infty$

$$(T_1 \cdot \ldots \cdot T_n)^{-1} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} X(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \to \eta(\omega) \quad \textit{п.н.} \tag{11.58}$$

Этот предел равен нулю п.н. тогда и только тогда, когда $G(\{0\}) = 0$.

Условия теоремы Д11.20 в определенном смысле точны, как показано в [?]. Об УЗБЧ для случайных полей см. также [?], [?].

Комплекснозначное поле $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}^d\}$ называется *изотропным*, если его ковариационная функция $r(s,t)$ зависит только от t и $\|s - t\|$. Если поле еще и однородно, то $r(s,t) = R(\|s-t\|)$ для $s,t \in \mathbb{R}^d$. Тогда формуле (11.57) можно придать следующий вид, как показывает

Теорема Д11.21 (см. [?], т. 1, с. 262). *Для того, чтобы функция $R(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$, была ковариационной функцией однородного и изотропного, непрерывного в среднем квадратическом комплекснозначного поля $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}^d\}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$R(u) = 2^{(m-2)2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^\infty \frac{I_{(m-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{(m-2)/2}} Q(d\lambda),\ \ u \in \mathbb{R}_+, \tag{11.59}$$

где $I_\nu(x)$ – бесселева функция первого рода, Q –неотрицательная конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, причем $Q(\mathbb{R}_+) = G(\mathbb{R}^m) = R(0)$.

Упомянем также понятие *однородного изотропного векторного поля* X, определенного на $\mathbb{R}^d \times \Omega$ и принимающего значения в $\mathbb{R}^d$. Помимо условия (11.53) здесь требуется инвариантность распределений относительно группы вращений, т.е.

$$(S^{-1}X(St_1), \dots, S^{-1}X(St_n)) \overset{\mathcal{D}}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n))$$

для любого вращения S в $\mathbb{R}^d$ и любых точек $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^d$ ($n \in \mathbb{N}$). Такие поля, обладающие к тому же *стационарностью приращений*, т.е.

$$(X(t_1+h)-X(t_0+h), \ldots, X(t_n+h)-X(t_{n-1}+h)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X(t_1)-X(t_0), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1}))$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t_0, \ldots, t_n, h \in \mathbb{R}^d$, играют важную роль в теории турбулентности (см., напр., [?]).

Матричную счетно-аддитивную функцию множества $G(B) = (G_{jk}(B))_{j,k=1}^m$, $B \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ – полукольцо множеств Λ) называют *неотрицательно определенной*, если матрица $G(B)$ неотрицательно определена при каждом $B \in \mathcal{K}$.

Для непрерывного в среднем квадратическом случайного поля $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и вектора $\tau \in \mathbb{C}^m$ введем скалярное поле $Y = \{Y(t) = (X(t), \tau),\ t \in \mathbb{R}^d\}$. Оно также является однородным и непрерывным в среднем квадратическом (проверьте). Пользуясь этим, докажите, что верна

Теорема Д11.22. *Для того, чтобы функция $R(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ была матричной ковариационной функцией непрерывного в среднем квадратическом однородного векторного поля $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$, необходимо и достаточно выполнение* (11.57)*, где R понимается, как $m \times m$ матричная функция, а G – как $m \times m$ матричная счетно-аддитивная функция на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Обобщение теоремы Бохнера – Хинчина на неотрицательно определенные функции со значениями в гильбертовом пространстве дано в приложении 4.

Векторной (со значениями в $\mathbb{C}^m$) *ортогональной случайной мерой* Z на некотором полукольце $\mathcal{K}$ множеств Λ называется L^2-процесс $\{Z(B),\ B \in \mathcal{K}\}$, такой, что

$$\mathsf{E}Z(B)Z(C)^* = G(B \cap C), \tag{11.60}$$

где G – матричнозначная счетно-аддитивная мера на $\mathcal{K}$, называемая *структурной* (матричной) *мерой.* **Конструкция интеграла по скалярной ортогональной случайной мере легко обобщается на векторный случай.**

Из теорем 10.13 и Д11.22 выводится

Теорема Д11.23. *Поле X, фигурирующее в теореме Д11.22, допускает представление вида*

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,\lambda)} Z(d\lambda),\ \ t \in \mathbb{R}^d, \tag{11.61}$$

где Z – векторная ортогональная случайная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ со структурной мерой G, отвечающей спектральному представлению ковариационной функции поля. При этом между пространством $L^2[X]$, т.е. замкнутой в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ линейной оболочкой величин X_t, $t \in \mathbb{R}^d$, и пространством $L^2(\nu) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$, где $\nu = \mathrm{Tr}G$, устанавливается изометрическое соответствие, при котором

1) $X(t) \leftrightarrow e^{i(t,\lambda)}$,

2) если $Y_k \leftrightarrow g_k(\lambda)$, где $Y_k \in L^2[X]$, $g_k \in L^2(\nu)$, $k = 1, 2$, то

$$Y_k = \int_{\mathbb{R}^d} g_k(\lambda) Z(d\lambda), \tag{11.62}$$

$$\mathsf{E}Y_1Y_2^* = \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\lambda) g_2(\lambda)^* G(d\lambda). \tag{11.63}$$

Получите отсюда, что справедлива

Теорема Д11.24 (Котельников – Шеннон). *Пусть однородное, непрерывное в среднем квадратическом поле $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}^d\}$ имеет ограниченный спектр, т.е. структурная мера сосредоточена на некотором параллелепипеде*

$$[-u_1, u_1] \times \ldots \times [-u_d, u_d]$$

с ненулевыми длинами ребер. Тогда

$$X(t) = \sum_{n=(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}^d} \prod_{k=1}^{d} \frac{\sin(u_k t_k - \pi n_k)}{u_k t_k - \pi n_k} X\left(\frac{\pi n_1}{u_1}, \ldots, \frac{\pi n_d}{u_d}\right), \tag{11.64}$$

где при каждом $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ ряд сходится в среднем квадратическом. Иначе говоря, речь идет о восстановлении (в среднем квадратическом) значений поля в произвольной точке $t \in \mathbb{R}^d$ по его значениям в узлах решетки.

Исследованию векторных процессов и полей посвящены монографии [?], [?], [?].

Очень важным для приложений оказывается вопрос о преобразованиях процессов. Пусть имеется некоторое устройство ("система"), на вход которой подается процесс $X = \{X(t),\, t \in T\}$ и на выходе получается процесс $Y = \{Y(t),\, t \in S\}$. **Формально** можно записать, $Y = AX$, однако обратим внимание на следующее обстоятельство. Если считать, что A – отображение одного функционального пространства в другое, то требуется позаботиться о том, чтобы (почти все) траектории X лежали в области определения A, и чтобы действие A на эти траектории приводило к случайному процессу (в смысле должных требований измеримости). Будем считать, что **действие A на процесс X приводит в каждый момент $t \in S$ к появлению определенной п.н. случайной величины** $Y(t)$. Удобство состоит в том, что в стороне остается нетривиальный вопрос о свойствах траекторий (потом можно выбрать модификацию того, что появилось на выходе системы). Именно так **введем операцию дифференцирования в среднем квадратическом**. Производную $X'(t)$ (комплекснозначного) L^2-процесса X, заданного в окрестности точки $t \in \mathbb{R}$, определим, как производную функции $X(t)$ со значениями в банаховом (гильбертовом) пространстве $B = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (см. с. ??), т.е.

$$\mathsf{E}|X'(t) - (X(t+h) - X(t))/h|^2 \to 0 \ \text{ при } h \to 0. \tag{11.65}$$

Такой подход позволяет создать содержательное исчисление (с классическим аналогом формулы Ньютона – Лейбница (8.53)). Если бы мы отправлялись от понятия сходимости $(X(t+h) - X(t))/h$ к предельной величине по вероятности при $h \to 0$, то даже упомянутая формула не имела бы места, как показывает следующее упражнение.

Упр. 11.25. Докажите, что для пуассоновского процесса $\{N_t,\, t \geqslant 0\}$ постоянной интенсивности $\lambda > 0$ производная по вероятности в каждой точке $t \in \mathbb{R}_+$ равна нулю п.н.

Итак, **далее для случайных процессов будем рассматривать производные в среднеквадратическом**, не оговаривая этого специально. Как обычно, производная k-го порядка в точке t определяется (если она существует) по значениям процесса $X^{(k-1)}(t)$ в окрестности этой точки.

Упр. 11.26. Пусть $X = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ – это L^2-процесс с ковариационной функцией $r(s,t)$. Докажите, что $X'(t)$ существует в точке $t \in (a,b)$ тогда и только тогда, когда существует *обобщенная вторая производная* $\dfrac{\widetilde{\partial}^2 r(s,t)}{\partial s \partial t}$ в точке (t,t) (с теорией обобщенных функций это никак не связано), здесь

$$\frac{\widetilde{\partial}^2 r(s,t)}{\partial s \partial t} := \lim_{h,u\to 0}(r(s+h,t+u) - r(s+h,t) - r(s,t+u) + r(s,t))/hu. \tag{11.66}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для производной в концевых точках, если иметь в виду односторонние производные.

Для выполнения этого и подобных упражнений **ключевую роль играет следующая элементарная лемма**.

Лемма Д11.27. *У функции* $f(t)$, $t \in [a,b]$, *принимающей значения в гильбертовом пространстве* H *со скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)$ *существует предел в точке* $t_0 \in [a,b]$ *тогда и только тогда, когда существует* $\lim_{s,t\to t_0}(f(s),f(t))$.

Упр. 11.28. Пусть существует $X'(t)$. Тогда существует $d\mathsf{E}X(t)/dt$ и

$$\mathsf{E}X'(t) = d\mathsf{E}X(t)/dt.$$

Кроме того,

$$\mathsf{E}X'(s)\overline{X(t)} = \frac{\partial r(s,t)}{\partial s},\ \mathsf{E}X'(s)\overline{X'(t)} = \frac{\widetilde{\partial}^2 r(s,t)}{\partial s\partial t}, \tag{11.67}$$

здесь левые и правые части существуют или не существуют одновременно, и если существуют, то равны.

Упр. 11.29. Докажите, что существование в точке (s,t) производной $\dfrac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s\partial t}$ влечет существование в этой точке $\dfrac{\widetilde{\partial}^2 r(s,t)}{\partial s\partial t}$ и их равенство, однако обратное утверждение неверно. Постройте пример L^2-процесса $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, имеющего производную в точке $u \in \mathbb{R}$, но не имеющего производной в точке $v \in \mathbb{R}$. Может ли быть такое для стационарного процесса X?

Упр. 11.30. Докажите, что у стационарного процесса $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ производная $X^{(k)}(t)$ существует в каждой точке t тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k} G(d\lambda) < \infty, \tag{11.68}$$

где G – спектральная мера X. Будет ли процесс $X^{(k)}$ стационарен? Если будет, то каково его спектральное представление?

Наряду с дифференцированием важный пример **линейной операции** (т.е.

$$A(\alpha X + \beta V) = \alpha AX + \beta AV$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $X, V \in \mathrm{Dom}A$) дает **интегрирование в среднем квадратическом случайных процессов**. Для L^2-процесса $X = \{X(t),\, t \in [a,b]\}$ случайная величина $\int_a^b X(t)dt$ понимается (если существует), как интеграл Римана по отрезку $[a,b]$ от функции X со значениями в банаховом (гильбертовом) пространстве

$L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, см. с. ??. Другими словами, для разбиений $a = x_0^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b$ и произвольных промежуточных точек $s_i \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \ldots, k_n$ $(n, k_n \in \mathbb{N})$

$$\mathsf{E}\left|\int_a^b X(t)dt - \sum_{i=1}^{k_n} X(s_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}\right|^2 \to 0 \text{ при } \Delta_n \to 0, \tag{11.69}$$

где $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$, $i = 1, \ldots, k_n$ и $\Delta_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant k_n} \Delta x_i^{(n)}$.

Упр. 11.31. Для введенных выше разбиений отрезка $[a, b]$ точками

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \ldots, k_n$$

с промежуточными точками $t_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, k_n$ пусть $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что центрированный L^2-процесс $X = \{X(t),\, t \in [a, b]\}$, имеющий ковариационную функцию r, интегрируем на $[a, b]$, т.е. выполнено (11.69), тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{n\to\infty, m\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{k_m} r(s_i^{(n)}, s_j^{(m)})\Delta x_i^{(n)} \Delta x_j^{(m)}. \tag{11.70}$$

Очевидно, что для L^2-процесса $X = \{X(t),\, t \in [a, b]\}$, имеющего ковариационную функцию r, условие (11.70) выполнено, если существует двойной интеграл Римана, т.е.

$$\exists \int_a^b \int_a^b r(s, t) ds dt. \tag{11.71}$$

Заметим, что Ванг [**?**] построил пример процесса $X = \{X(t),\, t \in [a, b]\}$, интегрируемого в среднем квадратическом на $[a, b]$, для которого не выполнено условие (11.71), см. [**?**, с. 200].

Выше уже отмечалось, что можно рассматривать дифференцирование и интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве B (когда существуют пределы по норме для соответствующих аппроксимаций). В частности, если $X = \{X(t),\, t \in [a, b]\}$ есть L^p-процесс для некоторого $p \geqslant 1$, т.е. $\mathsf{E}|X_t|^p < \infty$ при $t \in [a, b]$, то используют обозначение $(L^p) \int_a^b X(t)dt$, когда предел интегральных сумм Римана берется в пространстве $L^p(\Omega)$.

Естественно возникает **вопрос о связи** $(L^p) \int_a^b X(t)dt$ **с интегралами Римана и Лебега, берущимися от траекторий процесса** (когда это возможно). Данный вопрос подробно рассмотрен в [**?**], гл. 2, §2.1, где, в частности, на с. 47 дается, а на с. 348 и 349 разбирается

Упр. 11.32. Пусть процесс $\{X(t),\, t \in [a, b]\}$ измерим и непрерывен в пространстве $L^p(\Omega)$ для некоторого $p \geqslant 1$. Тогда почти наверное

$$(L^p) \int_a^b X(t)dt)(\omega) = \int_a^b X(t, \omega)dt, \tag{11.72}$$

где справа стоит интеграл Лебега, определенный для каждой траектории. У величин $X(t)$ в левой части равенства (11.72) аргумент ω опущен, чтобы подчеркнуть нетраекторный смысл интеграла. Заметим также, что по теореме Д2.15 непрерывность процесса на $[a, b]$ по норме $L^p(\Omega)$ обеспечивает наличие у него измеримой модификации.

Предлагается выполнить самостоятельно

Упр. 11.33. Пусть процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ непрерывен в среднем квадратическом на $T = [a,b] \cup [c,d]$. Тогда

$$\mathsf{E}\int_a^b X(t)dt = \int_a^b \mathsf{E}X(t)dt, \tag{11.73}$$

$$\mathrm{cov}(\int_a^b X(s)ds, X(t)) = \int_a^b r(s,t)ds,\ s \in T, \tag{11.74}$$

$$\mathrm{cov}(\int_a^b X(s)ds, \int_c^d X(t)dt) = \int_a^b \int_c^d r(s,t)dsdt, \tag{11.75}$$

где r –ковариационная функция процесса.

Несобственные интегралы по всей прямой вводятся стандартным образом, как пределы (если таковые существуют) **в соответствующем смысле интегралов по отрезкам** $[a,b]$**, когда** $a \to -\infty$ **и** $b \to \infty$.

Итак, для L^2-процесса $X = \{X(t),\ t \in [a,b]\}$ с ковариационной функцией r, некоторого множества T и комплекснозначной функции h, заданной на $T \times \mathbb{R}$, определим процесс

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)X(s)ds,\ t \in T. \tag{11.76}$$

Ясно, что $Y(t)$ в (11.76) существует, если конечен несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)r(s,u)\overline{h(t,u)}dsdu. \tag{11.77}$$

Функция h, фигурирующая в (11.76), называется *импульсной переходной функцией* системы. Действительно, если **формально** подставить в интеграл (11.76) вместо h функцию Дирака δ_s, то получим $Y(t) = h(t,s)$. Другими словами, $h(s,t)$ есть отклик системы в момент t на δ-импульс, подаваемый на вход в момент s.

В случае $T = \mathbb{R}$ соображения, по которым желательно иметь однородные по времени преобразования, приводят к изучению процессов вида

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)ds,\ t \in \mathbb{R}, \tag{11.78}$$

т.е. к *сверткам* или *фильтрам.* Удобное описание таких систем дает *частотная характеристика* или *коэффициент передачи*

$$H(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\lambda s}ds,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11.79}$$

Если $h \in L^1(\mathbb{R})$, т.е. интегрируема по Лебегу, то H, очевидно, существует. Частотная характеристика имеет следующий наглядный смысл. **Если** $h \in L^1(\mathbb{R})$**, то для каждого** $\lambda \in \mathbb{R}$ **неслучайная функция** $X(s) = e^{i\lambda s}$, $s \in \mathbb{R}$ **будет собственной функцией преобразования** (11.78)**, отвечающего собственному значению** $H(i\lambda)$. Это делает понятным смысл следующего упражнения.

Упр. 11.34. Пусть на вход фильтра (11.78) подается стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, имеющий спектральное представление (11.9) с ортогональной случайной мерой Z, структурная мера которой есть G. Докажите, что если частотная характеристика фильтра $H(i\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), G)$, то ковариационная функция процесса $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ имеет вид

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} |H(i\lambda)|^2 G(d\lambda),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{11.80}$$

а сам процесс

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} H(i\lambda) Z(d\lambda),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{11.81}$$

Вспоминая энергетическую интерпретацию спектральной меры, видим, что $|H(i\lambda)|^2$ **показывает во сколько раз увеличится энергия простых гармонических составляющих процесса X при прохождении через фильтр**.

Упр. 11.35. Какая импульсная переходная функция отвечает *полосовому фильтру*, т.е. фильтру, пропускающему без изменения гармонические составляющие процессов с частотами в полосе $[a, b]$ (это значит, что $H(i\lambda) = \mathbb{1}_{[a,b]}(\lambda)$)?

Интересно рассмотреть **применение спектральных представлений процессов к решению дифференциальных уравнений вида**

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) Y = X, \tag{11.82}$$

где X – заданный стационарный процесс, $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен с постоянными коэффициентами, а неизвестный процесс $Y = \{Y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ предполагается дифференцируемым в среднем квадратическом n раз в каждой точке $t \in \mathbb{R}$. Равенство (11.82) считается выполненным п.н. при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Воспользуемся спектральным представлением (11.9) процесса X. Будем искать решение Y в виде выхода фильтра, на вход которого подается процесс X (для этого неизвестный процесс был обозначен Y, а не X). Воспользовавшись упражнениями 11.34 и 11.30, приходим к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} P_n(i\lambda) H(i\lambda) Z(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda),\ \ t \in \mathbb{R},$$

откуда получаем (поясните), что $P_n(i\lambda)H(i\lambda) = 1$ для п.в. λ по спектральной мере G процесса X. Более того, упомянутый подход формально применим и в том случае, когда X есть белый шум $\dot{W}$ вида (11.49). Кроме того, если вместо X в правой части уравнения (11.82) фигурирует $Q_m(d/dt)X$, где $Q_m(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$ – многочлен степени m с постоянными коэффициентами, то приходим к уравнению

$$P_n(i\lambda) H(i\lambda) = Q_n(i\lambda), \tag{11.83}$$

которое имеет решение $H(i\lambda) = Q_n(i\lambda)/P_n(i\lambda)$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, если у многочлена $P_n(z)$ нет чисто мнимых корней. В этом случае, выделяя целую часть $Q_m(z)/P_n(z)$ и разлагая остаток на простые дроби, можно (см. [**?**, с. 282–284]) записать явный ответ, как выражается Y через X.

Аналог уравнения $P_n(d/dt)Y = Q_m(d/dt)X$, рассмотренного выше для процессов с непрерывным временем, приводит в случае процессов с дискретным временем

$(t \in T \subset \mathbb{Z})$ к изучению так называемых процессов авторегрессии – скользящего среднего. Об исследовании этих процессов см. [?]. В связи с каноническими представлениями случайных процессов упомянем еще одно направление исследований, относящееся к обновляющим процессам. Рассмотрим L^2-процесс $X = \{X(t),\, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ и подпространства $H_t(X)$, $t \in T$, состоящие из замыкания в среднем квадратическом линейной оболочки величин $X(s)$, $s \leqslant t$ $(s, t \in T)$. Спрашивается, можно ли найти *обновляющий процесс* $Y = \{Y(t),\, t \in T\}$, т.е. такой процесс с ортогональными приращениями, что

$$H_t(X) = H_t(Y) \ \text{ при всех } \ t \in T. \tag{11.84}$$

Хида [?] построил пример процесса $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$, для которого (11.84) невозможно. Крамер [?] доказал, что для любого конечного или счетного набора $\{G_n,\, 1 \leqslant n \leqslant N\}$ мер на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, упорядоченного отношением абсолютной непрерывости $G_1 \gg G_2 \gg \dots)$, существуют взаимно ортогональные процессы Z_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, каждый из которых имеет ортогональные приращения, причем $\mathsf{E}|Z_n(\lambda)|^2 = F_n(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где F_n – функция распределения меры G_n, и существует такой непрерывный процесс $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, что

$$H_t(X) = \sum_{n=1}^{N} H_t(Z_n), \ t \in \mathbb{R}. \tag{11.85}$$

Этот результат влечет *представление Крамера*:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} g_n(t, \lambda)\, dZ_n(\lambda), \ t \in \mathbb{R}, \tag{11.86}$$

где функции g_n, $n = 1, \dots, N$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} |g_n(t, \lambda)|^2\, dF_n(\lambda) < \infty, \ t \in \mathbb{R}. \tag{11.87}$$

Параметр $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется *кратностью процесса* X. С представлением вида (11.86) тесно связан вопрос об абсолютной непрерывности и сингулярности распределений процессов (см. [?]).

Лекция 12. Интеграл Ито

Некоторые подходы к построению стохастического интеграла. Предсказуемые множества. Построение ортогональной случайной меры Z на полукольце предсказуемых множеств, ее продолжение. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z. Вычисление интеграла Ито для простой функции. Прогрессивно измеримые множества. Конструкция интеграла Ито на основе прогрессивно измермимых функций. Распространение интеграла на пространство $\mathcal{L}^2$. Свойства интеграла Ито с переменным верхним пределом.

В классическом анализе имеются различные подходы к операциям интегрирования, приводящие к таким, вообще говоря, отличающимся понятиям, как, например, интегралы Римана, Лебега, Римана – Стильтьеса, Лебега – Стильтьеса, Данжуа (см. статью А.Н. Колмогорова "Исследование понятия интеграла" в книге [?]). Из дальнейших обобщений упомянем интегралы Бохнера и Петтиса [?].

В стохастическом анализе также рассматриваются разные подходы к интегрированию случайных функций по случайным процессам, случайным мерам, приводящие к различным конструкциям "стохастических интегралов". Так, в лекции 10 был изучен интеграл по ортогональной случайной мере.

Цель этой лекции – ввести интеграл Ито и исследовать его свойства. Суть проблемы заключается в том, чтобы научиться интегрировать по ортогональной случайной мере, порожденной винеровским процессом, не только детерминированные функции. Здесь тоже имеется несколько подходов к построению упомянутого интграла и его аналогов. Ниже мы рассмотрим три из них (см. также дополнение к этой лекции).

По-видимому, Н.Винер первым дал определение стохастического интеграла

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f(s)dW_s,\ t \geqslant 0,$$

для действительных детерминированных гладких функций $f(s)$, $s \geqslant 0$, воспользовавшись идеей "интегрирования по частям" (см. [?] и [?]). А именно, отправляясь от "естественной формулы" $d(fW) = fdW + Wdf$, по определению полагается

$$I_t(f) = f(t)W(t) - \int_0^t f'(s)W_s ds, \tag{12.1}$$

где интеграл $\int_0^t f'(s)W_s ds$ понимается, как потраекторный (т.е. для каждого $\omega \in \Omega$) интеграл Римана по отрезку $[0,t]$ от непрерывной функции $f'(s)W_s(\omega)$, $s \geqslant 0$. Заметим, что определить $\int_{(0,t]} f(s)dW_s$ как интеграл Лебега – Стильтьеса при фиксированном ω мы не можем, поскольку в силу теоремы 4.1 траектории броуновского движения с вероятностью единица являются функциями неограниченной вариации.

В 1944 году К.Ито [?] сделал существенный шаг в расширении понятия "стохастический интеграл", заложив тем самым фундамент *современного стохастического исчисления*, являющегося одним из мощных и эффективных средств исследования случайных процессов.

Прежде всего, нам понадобится **несколько более общее определение винеровского процесса**. А именно, пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – некоторая фильтрация в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Процесс $\{W(t,\omega),\ t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega\}$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованный с этой фильтрацией, назовем винеровским, если его траектории п.н. непрерывны, и для $0 \leqslant s < t < \infty$

$$W(t) - W(s) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s, \quad W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s). \tag{12.2}$$

Теорема 4.3 показывает, что в данном случае можно использовать естественную фильтрацию. Этим же свойством обладает, например, поток σ-алгебр, порожденный всеми d (независимыми) компонентами многомерного броуновского движения, если $W(t)$ – одна из компонент. Заметим также, что если случайная величина ξ не зависит от $W(t)$, $t \geqslant 0$, то в качестве $\mathcal{F}_s$ можно выбрать $\mathcal{F}_s = \sigma\{\xi,\, W(u)$, где $u \in [0,s]\}$, $s \geqslant 0$.

Располагая фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, введем σ-алгебру *Pred предсказуемых множеств* в $(0,\infty)\times\mathcal{F}$, которая порождается совокупностью множеств

$$\mathcal{K} = \{(s,t]\times A,\ A\in\mathcal{F}_s,\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty\}, \tag{12.3}$$

далее считаем $(s,t] = \varnothing$ при $s \geqslant t$.

Лемма 12.1. *$\mathcal{K}$ есть полукольцо.*

□ Пусть $B = (s,t]\times A$, $C = (u,v]\times D \in \mathcal{K}$. Тогда

$$BC = \{(s\vee u, t\wedge v]\times AD\} \in \mathcal{K},$$

поскольку $A, D \in \mathcal{F}_{s\vee u}$ и $AD \in \mathcal{F}_{s\vee u}$. Если $B \subset C$, то $(s,t]\subset(u,v]$ и $A \subset D$. Имеем

$$C\setminus B = \{(s,u]\times D\}\cup\{(u,v]\times(D\setminus A)\}\cup\{(v,t]\times D\}, \tag{12.4}$$

т.е. правая часть (12.4) является объединением трех непересекающихся множеств из $\mathcal{K}$ (мы учли, что $D\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_u$, $D\setminus A\in\mathcal{F}_u$. □

Определим на полукольце $\mathcal{K}$ функцию

$$Z((s,t]\times A,\omega) := (W(t,\omega)-W(s,\omega))\mathbb{1}_A(\omega). \tag{12.5}$$

Очевидно, $\mathsf{E}|Z(B)|^2<\infty$ для $B=(s,t]\times A\in\mathcal{K}$, а воспользовавшись первым условием из (12.2), видим, что

$$\mathsf{E}Z(B) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(W(t)-W(s))\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_s) = \mathsf{E}\mathbb{1}_A\mathsf{E}(W(t)-W(s)) = 0.$$

Лемма 12.2. *Функция $Z(B,\omega)$ является ортогональной случайной мерой на полукольце $\mathcal{K}$, имеющей структурную меру $\mu = \mathrm{mes}\times P$, где mes – мера Лебега на $\mathcal{B}((0,\infty))$.*

□ Пусть $B = (s,t]\times A$, $C = (u,v]\times D\in\mathcal{K}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}Z(B)\overline{Z(C)} = \mathsf{E}\mathbb{1}_{AD}(W(t)-W(s))(W(v)-W(u)) &=\\ = \mathsf{E}\mathbb{1}_{AD}\mathsf{E}((W(t)-W(s))(W(v)-W(u))|\mathcal{F}_{s\vee u}).\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\mathsf{E}((W(t)-W(s))(W(v)-W(u))|\mathcal{F}_{s\vee u}) = \begin{cases} 0, & \text{если } (s,t]\cap(u,v]=\varnothing,\\ t\wedge v - s\vee u, & \text{если } (s,t]\cap(u,v]\neq\varnothing.\end{cases}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}Z(B)\overline{Z(C)} = P(AD)\,\mathrm{mes}((s,t]\cap(u,v]) = \mu(BC).\ \square$$

В итоге, согласно теореме 10.10, ортогональная случайная мера Z продолжается на δ-кольцо $\mathfrak{M}$, состоящее из предсказуемых множеств $B\in\mathrm{Pred}$, для которых $\mu(B)<\infty$.

Функция $f : \Lambda \to \mathbb{R}$, где $\Lambda = (0,\infty)\times\Omega$, называется *предсказуемой*, если $f \in \mathrm{Pred}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Предсказуемость комплекснозначной функции f на Λ означает предсказуемость $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$. Итак, для $f \in L^2(\Lambda, \mathrm{Pred}, \mu)$ определен интеграл

$$Jf = \int_\Lambda f(\lambda)Z(d\lambda),\ \ \lambda = (t,\omega)\in\Lambda, \tag{12.6}$$

причем для $f, g \in L^2(\Lambda, \mathrm{Pred}, \mu)$

$$\mathsf{E}Jf = 0 \ \text{ и } \ (Jf, Jg) = \langle f, g\rangle, \tag{12.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – в $L^2(\Lambda,\mathrm{Pred},\mu)$, т.е.

$$\langle f, g\rangle = \mathsf{E}\int_0^\infty f(t,\omega)\overline{g(t,\omega)}dt \tag{12.8}$$

(в силу теоремы Фубини интегрировать в (12.8) можно в любом порядке). Наряду с (12.6) используется обозначение

$$If = \int_0^\infty f(t,\omega)dW_t. \tag{12.9}$$

Этот интеграл называется *интегралом Ито*.

На первый взгляд может показаться, что после интегрирования функции $f(\lambda)$ по мере $Z(d\lambda)$ в (12.6) исчезнет зависимость результата от ω. Однако это не так. Чтобы лучше разобраться с введенной операцией интегрирования, обратимся к классу *простых функций*

$$f(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(\omega)\mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t),\ \ t\in(0,\infty),\ \ \omega\in\Omega, \tag{12.10}$$

где $f : \Omega\to\mathbb{R}$ и $f_k \in \mathcal{F}_{t_k}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, а $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty$.

Лемма 12.3. *Каждая простая функция является предсказуемой.*

$\square$ Возьмем произвольное множество $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и любое $t > 0$. Тогда

$$\{(t,\omega)\in(0,\infty)\times\Omega :\ f(t,\omega)\in B\} = \bigcup_{k=0}^{m-1}\{(t_k,t_{k+1}]\times\{\omega :\ f_k(\omega)\in B\}\}\in\mathrm{Pred}, \tag{12.11}$$

т.к. $\{\omega :\ f_k(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}_{t_k}$ $(k = 0,\ldots,m-1)$, и в правой части (12.11) стоит конечное объединение множеств из полукольца $\mathcal{K}$. $\square$

Заметим, что простая функция f вида (12.10) входит в $L^2(\Lambda,\mathrm{Pred},\mu)$ тогда и только тогда, когда $f_k\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t_k},P)$. Это следует из того, что

$$\int_0^\infty |f(t,\omega)|^2dt = \sum_{k=0}^{m-1}|f_k(\omega)|^2(t_{k+1}-t_k). \tag{12.12}$$

Теорема 12.4. *Для простой функции f вида* (12.10) *имеем*

$$If = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(\omega)(W(t_{k+1},\omega) - W(t_k,\omega)). \tag{12.13}$$

□ Легко видеть, что f_k можно представить, как предел в $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_k}, P)$ функций вида

$$h_k^{(n)}(\omega) = \sum_{j=0}^{N_n} c_{k_j}^{(n)} \mathbb{1}_{A_{k_j}^{(n)}}(\omega), \quad c_{k_j}^{(n)} \in \mathbb{R},\ A_{k_j}^{(n)} \in \mathcal{F}_{t_k},\ j = 0, \dots, N_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{12.14}$$

т.е. $\mathsf{E}|f - h_k^{(n)}|^2 \to 0$ при $n \to \infty$ $(k = 0, \dots, m-1)$.

Теперь заметим, что

$$f^{(n)} := \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{(n)}(\omega) \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t) \overset{L^2(\mu)}{\longrightarrow} f \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следовательно, $If^{(n)} \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} If$ при $n \to \infty$. Поскольку I – линейное отображение (см. следствие 10.5), то

$$If^{(n)} = I\left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{N_n} c_{k_j}^{(n)} \mathbb{1}_{A_{k_j}^{(n)}}(\omega) \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t)\right) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{(n)}(\omega)(W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)).$$

Остается учесть, что

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{k=0}^{m-1} f_k(W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)) - \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{(n)}(W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega))\Big|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \mathsf{E}|f_k - h_k^{(n)}|^2 (t_{k+1} - t_k) \to 0,\ n \to \infty.$$

Мы приняли во внимание, что если $\xi_k \in \mathcal{F}_{t_k}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\mathsf{E}|\xi_k|^2 < \infty$, $(k = 0, \dots, m-1)$, то

$$r_{kl} := \mathsf{E}\xi_k \overline{\xi_l}(W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{l+1}) - W(t_l)) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \mathsf{E}|\xi_k|^2 (t_{k+1} - t_k), & k = l. \end{cases} \tag{12.15}$$

Математическое ожидание в левой части (12.15) определено, т.к.

$$\mathsf{E}|\xi_k|^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 = \mathsf{E}|\xi_k|^2 \mathsf{E}(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 < \infty$$

($\xi_k \in \mathcal{F}_{t_k}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $W(t_{k+1}) - W(t_k) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_k}$), а если $\xi, \eta \in L^2(\Omega)$, то $\xi\eta \in L^1(\Omega)$ по неравенству Коши – Буняковского – Шварца. Кроме того, $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathsf{E}\xi$, когда $\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$ и $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, поэтому

$$r_{kk} = \mathsf{E}|\xi_k|^2 \mathsf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 | \mathcal{F}_{t_k}) = \mathsf{E}|\xi_k|^2 (t_{k+1} - t_k),$$

$$r_{kl} = \mathsf{E}(\xi_k \overline{\xi_l}(W(t_{k+1}) - W(t_k)) \mathsf{E}(W(t_{l+1}) - W(t_l) | \mathcal{F}_{t_l})) = 0,\ k < l, \tag{12.16}$$

аналогично $r_{kl} = 0$ при $k > l$, $(k, l = 0, \dots, m-1)$. □

Итак, мы видим, что для простых функций вида (12.10) интеграл Ито задается формулой (12.13). Кроме того, нам известно, что этот интеграл обладает изометрическим свойством (12.7). Таким образом, **имеется возможность сначала определить интеграл Ито на классе простых функций вида** (12.10) **формулой** (12.13), **а затем распространить определение на более широкий класс функций**.

Заметим, что **построение интеграла J можно было осуществить по точно такой же схеме, отправляясь от полукольца множеств вида** $\{[s,t)\times A,\ A\in\mathcal{F}_s,\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty\}$. При этом в качестве простых функций брались бы $f:\ [0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$, такие, что

$$f(t,\omega)=\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k,\omega)\mathbb{1}_{[t_k,t_{k+1})}(t), \tag{12.17}$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_m<\infty$, а действительные с.в. $f(t_k,\cdot)\in\mathcal{F}_{t_k}|\mathcal{B}(\mathbb{R}), k=0,\ldots,m-1$. В этой связи введем, отправляясь от фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, σ-алгебру Prog *прогрессивно измеримых* подмножеств $[0,\infty)\times\Omega$:

$$C\in \mathrm{Prog}\ \Leftrightarrow\ C\cap\{[0,t]\times\Omega\}\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t\ \text{ при } t\geqslant 0, \tag{12.18}$$

где борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}_t=\mathcal{B}([0,t])$.

Функция $f:\ [0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ называется *прогрессивно измеримой*, если $f\in\mathrm{Prog}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Иначе говоря, для любых $t\geqslant 0$ и $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega:\ f(s,\omega)\in B\}\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t. \tag{12.19}$$

Поэтому **прогрессивная измеримость случайной функции f означает**, что

$$f \text{ на } [0,t]\times\Omega \text{ есть } \mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})-\text{измеримый с.э. при каждом } t\geqslant 0 \tag{12.20}$$

Лемма 12.5. *Простая функция вида* (12.17) *является прогрессивно измеримой.*

□ Возьмем $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $t\geqslant 0$. Если $t\in[0,t_1]$, то

$$\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega:\ f(s,\omega)\in B\}=[0,t]\times\{\omega:\ f(0,\omega)\in B\}\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t.$$

Если $t>t_1$, то обозначив $N=\max\{k:\ t_k\leqslant t\}$, имеем

$$\begin{aligned}\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega:\ f(s,\omega)\in B\}=\cup_{k=0}^{N-1}\{[t_k,t_{k+1})\times\{\omega:\ f(t_k,\omega)\in B\}\cup\\ \cup\,[t_N,t]\times\{\omega:\ f(t_N,\omega)\in B\}\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Мы учли, что $\{\omega:\ f(t_k,\omega)\in B\}\in\mathcal{F}_{t_k}\subset\mathcal{F}_t$ для $t_k\leqslant t$. □

Пусть $\mathcal{L}^2=L^2([0,\infty)\times\Omega,\mathrm{Prog},\mu)$, где $\mu=\mathrm{mes}\times P$, т.е. для $h\in\mathcal{L}^2$

$$\mathsf{E}\int_0^\infty |h(s,\omega)|^2ds<\infty. \tag{12.21}$$

Если h – комплекснозначная функция, то предполагается, что $\mathrm{Re}\,h$ и $\mathrm{Im}\,h$ – действительные прогрессивно измеримые функции.

Заметим, что простые f вида (12.17) входят в $\mathcal{L}^2$ тогда и только тогда, когда $f(t_k,\cdot)\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t_k},P)$, $k=0,\ldots,m$, как показывает (12.12).

Для простой f (т.е. вида (12.17)) **и винеровского процесса** $\{W(t),\ t\geqslant 0\}$ (удовлетворяющего (12.2) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$) **введем интеграл Ито** аналогично (12.13)

$$If=\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k,\omega)(W(t_{k+1})-W(t_k)). \tag{12.22}$$

Это определение корректно. Если наряду с (12.17)

$$f(t,\omega) = \sum_{j=0}^{r-1} g(s_j,\omega)\mathbb{1}_{[s_j,s_{j+1})}(t) \quad \mathrm{mes} \times P \text{ – п.н.},$$

где $0 = s_0 < \ldots < s_r < \infty$, то $\sum_{j=0}^{r-1} g(s_j,\omega)(W(s_{j+1})-W(s_j))$ будет P – п.н. совпадать с правой частью (12.13). Действительно,

$$f(t_k,\omega)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = f(t_k,\omega)(W(u) - W(t_k)) + f(t_k,\omega)(W(t_{k+1}) - W(u))$$

для любых $t_k < u < t_{k+1}$ (для упрощения записи пишем $W(t)$ вместо $W(t,\omega)$). Поэтому легко перейти к случаю, когда простые функции задаются одним и тем же разбиением $[0,\infty)$. Тогда и значения этих функций на каждом из упомянутых промежутков разбиения должны совпадать P – п.н.

Замечание 12.6. В определении (12.22) интеграла от простой функции мог выступать любой процесс $W(t)$ (а не только броуновское движение). Однако специфика броуновского движения становится существенной, если стремиться к тому, чтобы определить стохастический интеграл с "хорошими" свойствами для достаточно широкого класса функций, а не только для линейных комбинаций простых.

Лемма 12.7. *Для простых функций $f, g \in \mathcal{L}^2$ справедливы равенства* (12.7).

□ Пусть f задается формулой (12.17), а $g(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} g(t_j,\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$. Как объяснено выше, можно сразу считать, что в определении простых функций участвуют одни и те же точки, разбивающие $[0,\infty)$. Имеем

$$(If, Ig) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathsf{E}v_{kj}, \tag{12.23}$$

где $v_{kj} = f(t_k,\omega)\overline{g(t_j,\omega)}(W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))$. Вычисление $\mathsf{E}v_{kj}$ полностью аналогично (12.15). То, что $\mathsf{E}If = 0$ для $f \in \mathcal{L}^2$, немедленно получается с учетом (12.2). □

Лемма 12.8. *Простые функции вида* (12.17) *плотны в* $\mathcal{L}^2$.

□ **Для неслучайной функции** $u \in L^2[0,\infty) = L^2([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \mathrm{mes})$ и $\delta > 0$ введем функцию

$$u_\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_\delta^{(k)} \mathbb{1}_{\Delta_k}(t), \tag{12.24}$$

где $\Delta_k = \Delta_k(\delta) = [k\delta, (k+1)\delta)$, $k = 0, 1, \ldots$ и

$$u_\delta^{(0)} = 0, \quad u_\delta^{(k)} = \delta^{-1} \int\limits_{\Delta_{k-1}} u(t)\,dt \quad \text{при} \quad k \geqslant 1. \tag{12.25}$$

По неравенству Коши–Буняковского–Шварца для $m \geqslant 1$

$$\int\limits_{\Delta_m} |u_\delta(t)|^2\,dt = |u_\delta^{(m)}|^2\delta \leqslant \int\limits_{\Delta_{m-1}} |u(t)|^2 dt, \tag{12.26}$$

поэтому

$$\int_0^\infty |u_\delta(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^\infty \int_{\Delta_k} |u_\delta(t)|^2 dt \leqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{\Delta_{k-1}} |u(t)|^2 dt = \int_0^\infty |u(t)|^2 dt \tag{12.27}$$

и $u_\delta(\cdot) \in L^2[0,\infty)$.

Докажем, что

$$u_\delta(\cdot) \to u(\cdot) \text{ в } L^2[0,\infty) \text{ при } \delta \to 0. \tag{12.28}$$

Пусть

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} r_j \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t), \quad \text{где} \quad 0 = t_0 < \ldots < t_m < \infty; \quad r_j \in \mathbb{C}, \quad j = 0,\ldots,m-1. \tag{12.29}$$

Тогда если $\Delta_{k-1} \cup \Delta_k \subset [t_j, t_{j+1})$, то $u_\delta(t) = u_\delta^{(k)} = r_j = u(t)$ для $t \in \Delta_k$. Таким образом, при всех достаточно малых δ функции u и u_δ могут не совпадать лишь в (полузамкнутых) окрестностях $\widetilde{\Delta}_j = \Delta_{i_j} \cup \Delta_{i_j+1}$ точек t_j, $j = 0,\ldots,m$. Учитывая, что точек t_j конечное число, получаем (12.28). Точнее говоря, в силу (12.26)

$$\int\limits_{\bigcup_{j=0}^m \widetilde{\Delta}_j} |u(t) - u_\delta(t)|^2 dt \leqslant 2 \int\limits_{\bigcup_{j=0}^m \widetilde{\Delta}_j} |u(t)|^2 dt + 2 \int\limits_{\bigcup_{j=0}^m \widetilde{\Delta}_j} |u_\delta(t)|^2 dt \leqslant 4 \int\limits_{\bigcup_{j=0}^m \Delta_i'} |u(t)|^2 dt,$$

где $\Delta_i' = \Delta_{i_j-1} \cup \Delta_{i_j} \cup \Delta_{i_j+1}$ ($\Delta_{-1} = \varnothing$), но для функции $u \in L^2[0,\infty)$ имеем $\int\limits_B |u(t)|^2 dt \to 0$ при $\operatorname{mes} B \to 0$.

Пусть теперь u — произвольная функция из $L^2[0,\infty)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем ступенчатую функцию $v^{(\varepsilon)}$ вида (12.24), такую что $\|u - v^{(\varepsilon)}\| < \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2[0,\infty)$. Тогда

$$\|u - u_\delta\| \leqslant \|u - v^{(\varepsilon)}\| + \|v^{(\varepsilon)} - v_\delta^{(\varepsilon)}\| + \|v_\delta^{(\varepsilon)} - u_\delta\| \leqslant 2\varepsilon + \|v^{(\varepsilon)} - v_\delta^{(\varepsilon)}\| < 3\varepsilon$$

при достаточно малых δ. Мы учли, что $v_\delta^{(\varepsilon)} - u_\delta = (v^{(\varepsilon)} - u)_\delta$, и воспользовались (12.27).

Возьмем теперь $h(t,\omega) \in \mathcal{L}^2$ и при каждом $\omega \in \Omega$ для $\delta = 1/n$ определим согласно (12.24), (12.25) функцию $h_{1/n}(t,\omega)$. Если $\int\limits_{\Delta_k} h(t,\omega)\,dt$ не существует, то заменяем его нулем. Из (12.21) по теореме Фубини получаем, что

$$\int_0^\infty |h(t,\omega)|^2 dt < \infty \text{ п.н.}$$

Следовательно, для п.в. ω существуют $\int\limits_{\Delta_k} h(t,\omega)\,dt$ при всех $k = 0,1,2,\ldots$. Кроме того, по теореме Фубини $\int\limits_{\Delta_{k-1}} h(s,\omega)\,ds$ есть $\mathcal{F}_{k\delta} \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{C})$-измеримая величина. Мы учли также (12.20). Принимая во внимание (12.27) и (12.21), видим, что $h_{1/n}(t,\omega)$ – почти простые функции в $\mathcal{L}^2$ (со счетным, а не конечным числом ступенек). В силу (12.27)

$$\int_0^\infty |h(t,\omega) - h_{1/n}(t,\omega)|^2 dt \leqslant 4 \int_0^\infty |h(t,\omega)|^2 dt \text{ п.н.}$$

Согласно (12.28) получаем

$$\int_0^\infty |h(t,\omega) - h_{1/n}(t,\omega)|^2 dt \to 0 \ \text{ п.н. при } n \to \infty.$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\mathsf{E} \int_0^\infty |h(t,\omega) - h_{1/n}(t,\omega)|^2 dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Остается учесть, что рассматривая вместо (12.24) конечные суммы

$$u_\delta(t,N) = \sum_{k=0}^N u_\delta^{(k)} \mathbb{1}_{\Delta_k}(t),$$

мы в силу (12.28) для любого $\delta > 0$ можем обеспечить соотношение

$$u_\delta(\cdot, N) \to u_\delta(\cdot) \ \text{ в } L^2[0,\infty) \ \text{ при } N \to \infty.$$

Соответственно, для $h_{1/n}(t,\omega)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ получим, что

$$\mathsf{E} \int_0^\infty |h_{1/n}(t,\omega) - h_{1/n}(t,\omega; N)|^2 dt \to 0, \ N \to \infty. \ \square$$

Теперь легко задать I на всем пространстве $\mathcal{L}^2$. Положим

$$If = \mathrm{l.i.m.}\, If_n, \tag{12.30}$$

где простые функции $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ при $n \to \infty$, а предел в (12.30), как обычно, понимается в $L^2(\Omega)$. Выбрать такие f_n можно в силу леммы 12.8, а то, что предел в (12.30) не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, доказывается с помощью леммы 12.7. При этом (см. (12.7))

$$(If, Ig) = \langle f, g \rangle \ \text{ и } \ \mathsf{E}(If) = 0 \text{ для любых } f, g \in \mathcal{L}^2. \tag{12.31}$$

Используется следующее обозначение:

$$If = \int_0^\infty f(t,\omega)\, dW_t, \quad f \in \mathcal{L}^2. \tag{12.32}$$

Для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \infty$ и $f \in \mathcal{L}^2$ определим

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t,\omega) dW_t = \int_0^\infty f(t,\omega) \mathbb{1}_{[t_1,t_2)}(t)\, dt. \tag{12.33}$$

Для простой функции f прогрессивная измеримость $f\mathbb{1}_{[t_1,t_2)}$ очевидна. В общем случае надо произвести аппроксимацию простыми функциями в $\mathcal{L}^2$, выбрать сходящуюся $\mathrm{mes} \times P$-п.н. подпоследовательность и воспользоваться замечанием 4.7. **При $t_1 = t_2$ считаем интеграл в (12.33) равным нулю.**

Пользуясь линейностью изометрического отображения (12.32), сразу получаем, что для каждых $0 \leqslant v < s < u \leqslant \infty$

$$\int_v^u f(t,\omega)\, dW_t = \int_v^s f(t,\omega)\, dW_t + \int_s^u f(t,\omega)\, dW_t \ \text{ п.н.} \tag{12.34}$$

Замечание 12.9. Для конечного $T > 0$ мы получили бы то же (п.н.) значение $\int\limits_0^T f(t,\omega)\,dW_t$, если бы вместо (12.33) воспроизвели всю схему построения интеграла Ито на конечном отрезке с использованием простых функций (12.17), имеющих $t_n = T$ (точнее говоря, $f(t,\omega) = f_{t_{n-1}}(\omega)$ для $t \in [t_{n-1}, T]$). В определении (12.18) при этом рассматривались бы $t \in [0, T]$.

Теорема 12.10. *Пусть прогрессивно измеримая функция $f(t,\omega)$, заданная для $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, является непрерывной в среднем квадратическом. Тогда*

$$\int\limits_0^T f(t,\omega)\,dW_t = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)},\omega)(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) \tag{12.35}$$

при измельчении разбиений вида $0 = t_0^{(n)} < \ldots \ \ldots < t_n^{(n)} = T$, т. е. когда

$$\delta_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□ Функция $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)},\omega)\mathbb{1}_{[t_k^{(n)},t_k^{(n)})}(t)$ – простая из $\mathcal{L}^2$ и для нее

$$If_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)},\omega)(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})).$$

Остается заметить, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ при измельчении разбиения промежутка $[0, T]$. Действительно,

$$\int\limits_0^T \mathsf{E}|f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 dt \leqslant T \sup_{|t-s|\leqslant\delta_n} \mathsf{E}|f(t,\omega) - f(s,\omega)|^2 \to 0$$

при $\delta_n \to 0$ в силу того, что случайная функция, непрерывная в среднем квадратическом на отрезке, будем равномерно непрерывна в среднем квадратическом на этом отрезке (непрерывная на компакте функция со значениями в банаховом пространстве является равномерно непрерывной на компакте). □

Пользуясь этим результатом, нетрудно получить, что

$$\int\limits_0^T W_t\,dW_t = \underset{\delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

Подчеркнем, что **выбор в** (12.35) **значений** f **в левых концах промежутков** $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$ **играет принципиальную роль**. Например,

$$\underset{\delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1}^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) = \frac{W_T^2}{2} + \frac{T}{2}.$$

Фиксируем $f \in \mathcal{L}^2$ и рассмотрим процесс

$$Y_t = \int\limits_0^t f(s,\omega)\,dW_s, \quad t \geqslant 0, \tag{12.36}$$

определяемый согласно (12.33) как $\int_0^\infty f(s,\omega)\mathbb{1}_{[0,t)}(s)dW_s$ ($Y_0 = 0$). Для интеграла (12.36) используется обозначение $I_t(f)$ или $(f \cdot B)_t$, где $B = \{B(s),\, s \geqslant 0\}$ – броуновское движение.

Теорема 12.11. *При каждом $t \geqslant 0$ случайную величину Y_t, задаваемую формулой (12.36), можно выбрать так (из множества ей эквивалентных), что одновременно будут выполнены следующие свойства:*

1) $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *— мартингал;*
2) *для п.в. ω траектории $Y_t(\omega)$ непрерывны на $[0,\infty)$;*
3) *с.ф. $Y_t(\omega)$, $0 \leqslant t < \infty$, является прогрессивно измеримой.*

□ **Докажем 1).** Пусть $f \in \mathcal{L}^2$ и $f(t,\omega) = 0$ п.н. при $0 \leqslant t < s$. Тогда покажем, что

$$\mathsf{E}(If \mid \mathcal{F}_s) = 0 \ \text{ п.н.} \tag{12.37}$$

Если f — простая функция вида (12.17) из $\mathcal{L}^2$ и $s > 0$, то можем считать $s = t_1$. Тогда

$$\mathsf{E}(If \mid \mathcal{F}_{t_1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}(\mathsf{E}(f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}(f(t_k)\mathsf{E}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}(f(t_k)\cdot 0 \mid \mathcal{F}_{t_1}) = 0.$$

Заметим также, что

$$\mathsf{E}(If \mid \mathcal{F}_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{E}(\mathsf{E}(f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_0) = 0 \ \text{ п.н.} \tag{12.38}$$

По лемме 12.8 находим простые функции $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ при $n \to \infty$. Очевидно, $g_n = f_n \mathbb{1}_{[s,\infty)} \in \mathcal{L}^2$ и т. к. $f(t) = 0$ п.н. при $0 \leqslant t < s$, то $g_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$. Следовательно, $Ig_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} If$ при $n \to \infty$. Но тогда $\mathsf{E}(Ig_n \mid \mathcal{F}_s) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \mathsf{E}(If \mid \mathcal{F}_s)$. Действительно, если $\xi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi$, то $\mathsf{E}(\xi_n \mid \mathcal{A}) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A})$, где $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Пользуясь неравенством Иенсена, имеем

$$\mathsf{E}|\mathsf{E}(\xi \mid \mathcal{A}) - \mathsf{E}(\xi_n \mid \mathcal{A})|^2 = \mathsf{E}|\mathsf{E}(\xi - \xi_n \mid \mathcal{A})|^2 \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}|\xi - \xi_n|^2 \mid \mathcal{A}) = \mathsf{E}|\xi - \xi_n|^2.$$

Учитывая, что $\mathsf{E}(Ig_n \mid \mathcal{F}_s) = 0$ п.н., получаем (12.37) в общем случае.

В силу (12.34) и (12.37), получаем для $s \leqslant t$

$$\mathsf{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_s) = Y_s + \mathsf{E}\left(\int_0^\infty f(u,\omega)\mathbb{1}_{[s,t)}(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\right) = Y_s \ \text{ п.н.} \tag{12.39}$$

Мы учли также, что $\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s$ для действительных f есть $\mathcal{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая величина в силу (12.18), (12.22), (12.30) и замечания 4.7. Итак, свойство 1) установлено. При этом не важно, как мы выбирали Y_t из величин, ей эквивалентных (все σ-алгебры считаются пополненными).

Докажем 2). Если f — простая функция, задаваемая формулой (12.17), то

$$\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s = \begin{cases} f(t_0)(W_t - W_{t_0}) = f(0)W_t, & t \in [0,t_1), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + f(t_m)(W_t - W_{t_m}), & t \in [t_m, t_{m+1}), \\ & m = 1,\ldots,n, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), & t \geqslant t_n. \end{cases} \tag{12.40}$$

Для $f \in \mathcal{L}^2$ выберем простые функции $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ при $n \to \infty$. Учитывая непрерывность траекторий винеровского процесса и явное выражение для $\int\limits_0^t f_n(s,\omega)\,dW_s$ (см. (12.40)), видим, что этот интеграл при всех ω представляет собой непрерывную функцию на $[0,\infty)$.

Из последовательности f_n выберем подпоследовательность f_{n_k} так, чтобы

$$\mathsf{E}\int\limits_0^\infty |f_{n_{k+1}}(s,\omega) - f_{n_k}(s,\omega)|^2 ds \leqslant 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12.41}$$

Пользуясь тем, что интеграл Ито — линейное отображение, заданное на $\mathcal{L}^2$, для произвольного $T > 0$ в силу следствия 5.17 и доказанного свойства 1) имеем при всех $\varepsilon > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$

$$P\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl|\int\limits_0^t f_n(s,\omega)\,dW_s - \int\limits_0^t f_m(s,\omega)\,dW_s\biggr| > \varepsilon\biggr) \leqslant \varepsilon^{-2}\mathsf{E}\biggl[\int\limits_0^T (f_n - f_m)dW_s\biggr]^2. \tag{12.42}$$

Из (12.41), (12.42) и первого соотношения в (12.31) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^\infty P\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl|\int\limits_0^t (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})dW_s\biggr| > \frac{1}{k^2}\biggr) \leqslant \sum_{k=1}^\infty k^4 2^{-k} < \infty.$$

Поэтому по лемме Бореля–Кантелли для п.в. ω при $k \geqslant \mathcal{K}(\omega)$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl|\int\limits_0^t (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})dW_s\biggr| \leqslant k^{-2}.$$

Если ряд из непрерывных на $[0,T]$ функций п.н. сходится равномерно, то сумма этого ряда есть п.н. непрерывная на $[0,T]$ функция. Теперь заметим, что для каждого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t f_{n_1}(s,\omega)dW_s + \sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_0^t (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})dW_s = \int\limits_0^t f_{n_N}(s,\omega)\,dW_s \xrightarrow{L^2(\Omega)} \int\limits_0^t f(s,\omega)\,dW_s$$

при $N \to \infty$. Но если для любого $t \in [0,T]$ имеем $\xi_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi(t)$ и $\xi_k(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta(t)$, то $\xi(t) = \zeta(t)$ п.н. при $t \in [0,T]$ (т. к. $\xi_k(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi(t)$, то можно найти подпоследовательность $\xi_{m_j}(t) \to \zeta(t)$ п.н., поэтому $\xi(t) = \zeta(t)$ п.н.).

Таким образом, на $[0,T]$ мы построили непрерывную модификацию процесса Y_t. Это построение можно произвести для каждого промежутка $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что если $X_t = Z_t$ п.н. для каждого $t \in [0,T]$ и траектории этих процессов п.н. непрерывны на $[0,T]$, то $P(\omega\colon\ X_t(\omega) = Z_t(\omega)$ для всех $t \in [0,T]) = 1$. Действительно, возьмем счетное всюду плотное на $[0,T]$ множество M_T. Тогда в силу непрерывности траекторий процессов X_t и Z_t имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\omega\colon \sup_{t\in[0,T]}|X_t(\omega) - Z_t(\omega)| > \varepsilon) = P(\omega\colon \sup_{t\in M_T}|X_t(\omega) - Z_t(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

Из сказанного и того, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, вытекает, что процесс Y_t может быть построен п.н. непрерывным на $[0,\infty)$. Свойство 2) доказано.

Докажем 3). При доказательстве 1) мы установили, что Y_t является $\mathcal{F}_t\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой величиной для каждого $t \geqslant 0$ (для комплексных процессов отдельно рассматриваются действительная и мнимая части). Кроме того, мы можем выбрать непрерывную на $[0,\infty)$ для п.в. ω модификацию Y_t со свойством прогрессивной измеримости, как показывает

Лемма 12.12. *Пусть действительный случайный процесс $X = \{X(t,\omega),\ t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ имеет траектории, п.н. непрерывные справа на $[0,T)$. Если $X_t \in \mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ при каждом $t \in [0,T]$, где $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ – некоторая фильтрация, то у процесса существует прогрессивно измеримая модификация.*

□ Пусть сначала для $m \geqslant 2$

$$X(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} X(t_k,\omega)\mathbb{1}_{\Delta_k}(t) \quad \text{для} \quad t \in [0,T], \omega \in \Omega, \tag{12.43}$$

где $0 = t_0 < \ldots < t_{m+1} = u$, $\Delta_0 = [0,t_1]$, $\Delta_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1,\ldots,m-1$. Такой процесс, очевидно, является прогрессивно измеримым. Общий случай сводится к рассмотренному. А именно, если при всех $\omega \in \Omega_0$, где $P(\Omega_0) = 1$, траектории X непрерывны справа на $[0,T)$, то вводим процессы

$$X_n(t,\omega) = \begin{cases} X(q_n(t),\omega) & \text{при } q_n(t) := ([2^n t]+1)2^{-n} \leqslant T, \\ X(T,\omega) & \text{при } q_n(t) > T, \end{cases}$$

здесь $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда процессы X_n имеют вид (12.43). Положим

$$V_n(t,\omega) = X_n(t,\omega)\mathbb{1}_{\Omega_0}(\omega),\ t \in [0,T],\ \omega \in \Omega.$$

Легко видеть, что процессы V_n измеримы и для всех $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} V_n(t,\omega) = X(t,\omega)\mathbb{1}_{\Omega_0}(\omega).$$

Остается воспользоваться леммой 4.6. □

Теорема 12.11 доказана. □

Поскольку для $f \in \mathcal{L}^2$ и Y_t, фигурирующих в теореме 12.11

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathsf{E}|Y_t| \leqslant \sup_{t\geqslant 0}(\mathsf{E}|Y_t|^2)^{1/2} = \sup_{t\geqslant 0}(\mathsf{E}\int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds)^{1/2} \leqslant (\mathsf{E}\int_0^\infty |f(s,\omega)|^2 ds)^{1/2},$$

то, полагая $Y_\infty = \int_0^\infty f(s,\omega)dW_s$, пользуясь тем, что формула (12.39) верна и при $t = \infty$, по теореме 5.14 заключаем, что $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}}$ – **мартингал**, где $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t\geqslant 0}\mathcal{F}_t$.

В соответствии с замечанием 12.8 укажем, что если

$$f \in \mathcal{L}_T^2 = L^2([0,T]\times\Omega, \mathrm{Prog}, \mathrm{mes}\times P),$$

где $T < \infty$, то утверждения теоремы 12.11 остаются в силе для $t \in [0,T]$.

Дополнения и упражнения.

Введение σ-алгебр Pred **и** Prog **выражает идею рассмотрения случайных функций X_t, $t \in T \subset \mathbb{R}$, которые в каждый момент $t \in T$ "не зависят от будущего"** в смысле определенных требований измеримости по паре аргументов (t,ω). По сути дела те же соображения приводили к рассмотрению "физически осуществимых фильтров". Заметим также, что вместо изучения случайных функций на промежутке $[0,\infty)$ (или $(0,\infty)$) мы могли рассматривать процесс на множестве $T \subset \mathbb{R}$ и все определения модифицировать (как это делается в [?], §6.2). А именно, Pred вводится, как σ-алгебра, порожденная множествами вида $(T \cap (t,\infty)) \times B$, где $t \in T$, $B \in \mathcal{F}_t$. Множество $A \subset T \times \Omega$ принадлежит Prog, если

$$A \cap ((-\infty, t] \times \Omega) \in \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t \quad \text{для каждого } t \in T,$$

где $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t])$. Обратим внимание на то, что при построении интеграла Ито с помощью ортогональной случайной меры мы использовали промежуток $(0,\infty)$, а при построении интеграла Ито для прогрессивно измеримых функций бралась полуось $[0,\infty)$. При этом σ-алгебры предсказуемых и прогрессивно измеримых множеств оказывались формально несравнимыми, т.к. изучались подмножества в разных пространствах. В [?], §6.2, σ-алгебры Pred и Prog введены в одном и том же пространстве $T \times \Omega$ ($T \subset \mathbb{R}$), и, в частности, там на с. 153 доказана

Теорема Д12.1. *Любая прогрессивно измеримая случайная функция и любая предсказуемая случайная функция согласована с данным семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in T\subset\mathbb{R}}$ (то есть* Pred $\subset$ *Ad,* Prog $\subset$ *Ad, где по определению $A \subset T \times \Omega$ принадлежит σ-алгебре Ad в пространстве $T \times \Omega$, если $\{\omega : (t,\omega) \in A\} \subset \mathcal{F}_t$ для каждого $t \in T$). Если в T есть наименьший элемент t_0, то любая предсказуемая случайная функция X_t $(t \in T)$ такова, что $X_{t_0}(\cdot) = const$.*

Упр. 12.2. Докажите, что если T – отрезок, интервал или полуинтервал, то Pred $\subset$ Prog.

Упр. 12.3. Пострйте пример прогресивно измеримой, но непредсказуемой функции.

Упр. 12.4. Пусть $\{X_t,\ t \in T \subset \mathbb{R}\}$ – прогрессивно измеримая действительная случайная функция и τ – марковский момент (рассматривается фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in T\subset\mathbb{R}}$). Докажите, что функция $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ на множестве $\{\omega : \tau(\omega) < \infty\}$ измерима относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_\tau$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Опишем стуктуру функций, интегрируемых по Ито на $(0,\infty)$. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – некоторая фильтрация в $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, относительно которой $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ – броуновское движение. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$, состоящее из действительных функций f, измеримых по (t,ω) (т.е. $f \in \mathcal{B}(0,\infty)\times\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$) таких, что $f(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ при каждом $t > 0$ и $\mathsf{E}\int_0^\infty f^2(t,\omega)dt < \infty$. Тогда справедлив следующий результат (см., напр., [?, часть I, с. 45]).

Теорема Д12.5 (Дуб). *$\mathcal{H} \subset L^2((0,\infty)\times\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, где $\mathcal{A}$ – пополнение σ-алгебры* Pred *по мере $\nu = \mathrm{mes}\times P$, здесь* mes *– мера Лебега на $(0,\infty)$.*

Используя вариант леммы 12.8 для простых функций вида (12.10), нетрудно выполнить приводимое ниже упражнение, которое содержит результат, в определенном смысле обратный теореме 12.5.

Упр. 12.6. Докажите, что если $f \in L^2((0,\infty)\times\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, то найдется функция $h \in \mathcal{H}$ такая, что $f(t,\omega) = h(t,\omega)$ п.н. по мере ν.

Упр. 12.7. Пусть τ – марковский момент такой, что $\tau(\omega) \leqslant T$ при всех $\omega \in \Omega$ (T – положительная константа). Обозначим $I_t(f)$ правую часть формулы (12.36). Докажите, что $I_\tau(f) = I_T(f\mathbb{1}_{(0,\tau]})$, где $I_\tau(f) := I_{\tau(\omega)}(f)$.

Упр. 12.8. Докажите, что если $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ есть неслучайная функция из пространства Скорохода $\mathcal{D}[0,\infty)$, иначе говоря, f – это *cadlag*-функция, т.е. имеющая предел слева в каждой точке $t > 0$ и непрерывная справа на $[0,\infty)$, то $I_t(f)$, $t \geqslant 0$ – гауссовский процесс. Найдите его среднее и ковариационную функцию.

Стохастический интеграл позволяет дать "явное" представление фрактльного броуновского движения. Случайный процесс $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ называется *автомодельным*, (*самоподобным*), если для каждого $a > 0$ можно найти такое $b > 0$, что

$$\mathcal{L}aw(X_{at},\ t \geqslant 0) = \mathcal{L}aw(bX_t,\ t \geqslant 0). \tag{12.44}$$

Иначе говоря, **изменение временной шкалы** ($t \to at$) **приводит к тому же самому результату, что и изменение фазовой шкалы** ($x \to bx$). Если в определении (12.44) для любого $a > 0$ параметр $b = a^H$, то случайный процесс X называется *автомодельным процессом с показателем Харста H*. Величина $D = 1/H$ называется *статистической фрактальной размерностью* случайного процесса X.

Напомним (см. (3.31)), что фрактальное броуновское движение $\{B_H(t),\ t \geqslant 0\}$ для $0 < H \leqslant 1$ определяется как центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}(B_H(s), B_H(t)) = s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}, \quad s,t \geqslant 0.$$

Упр. 12.9. Объясните, почему $\{B_H(t),\ t \geqslant 0\}$ – автомодельный процесс с показателем Харста.

Процессы B_H впервые рассматривались А.Н. Колмогоровым в 1940 г. в [?], где они назывались *спиралями Винера.* Термин фрактальное (или дробное, "fractional") броуновское движение был введен Б. Мандельбротом и Й. Ван Нессом в 1968 г. в [?], и там же было получено следующее представление.

Теорема Д12.10 (Мандельброт, Ван Несс). *Для $0 < H < 1$ и $t \geqslant 0$ имеем*

$$B_H(t) = c_H\{\int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}]dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2}dW_s\}, \tag{12.45}$$

где нормирующая константа c_H выбрана так, что $\mathsf{E}B_H^2(1) = 1$ (см., напр., [?, с. 281]), а $\{W_s,\ s \geqslant 0\}$ и $\{B_s = W_{-s}\}$ для $s \leqslant 0$ – независимые стандартные винеровские процессы.

Фрактальное броуновское движение (и его дискретные аналоги) используются во многих важных моделях, в частности, для описания динамики финансовых индексов (см. [?], [?]). Сложность изучения процессов $B_H(t)$ с $0 < H \leqslant 1$ состоит в том, что за исключением случая $H = 1/2$ (т.е. броуновского движения) эти процессы не являются *семимартингалами* (т.е. не входят в важный класс процессов, для которых развито стохастическое исчисление, см. [?, гл. 4]). Если в представлении (12.45) вместо H взять гельдеровскую функцию H_t (т.е. $|H_t - H_s| \leqslant c|t-s|^\alpha$, $\alpha > 0$) со значениями в $(0,1)$, то получается случайный процесс, называемый *мультифрактальным броуновским движением.* Этот процесс был введен и детально изучен в работе [?].

Упр. 12.11. (см. [?]). Докажите, что для процесса B_H при $n \to \infty$ имеем

$$\widehat{H}_n := \ln(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |B_H(k/n) - B_H((k-1)/n)|)/\ln(1/n) \to H \quad \text{п.н.}$$

Будем говорить, что п.н. непрерывный на $[0, \infty)$ процесс X_t допускает *стохастический дифференциал*, если с вероятностью 1 сразу для всех $t \geqslant 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s + \int_0^t g(s, \omega)\, ds, \tag{12.46}$$

где $f \in \mathcal{L}^2([0, \infty))$, а прогрессивно измеримая функция $g\colon [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ такова, что

$$P\biggl(\int_0^\infty |g(s, \omega)|\, ds < \infty\biggr) = 1 \tag{12.47}$$

(винеровский процесс $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$ согласован с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющей (12.2)). В силу наложенных условий на функции f и g правая часть (12.46) определена и дает п.н. непрерывный процесс.

Соотношение (12.46) можно переписать формально в виде

$$dX_t = f(t, \omega)\, dW_t + g(t, \omega)\, dt. \tag{12.48}$$

Далее для одной и той же функции F может использоваться как запись $F(t)$, так и F_t. Заметим, что все сказанное очевидным образом переформулируется на случай, когда $t \in [u, v]$, $0 \leqslant u < v < \infty$.

Известно, что даже при вычислении неслучайных интегралов ключевую роль играют формулы дифференциального исчисления (табличные интегралы), интегрирование по частям и замена переменных. В теории интеграла Ито мы можем опираться только на интегральные формулы. Здесь **важнейшим является следующий результат**, который мы приведем с полным доказательством.

Теорема Д12.12 (формула Ито). *Пусть процесс X_t, $t \geqslant 0$, допускает стохастический дифференциал (с функциями f и g, обладающими указанными выше свойствами). Пусть функция $h\colon [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что существуют непрерывные $\partial h/\partial t$, $\partial^2 h/\partial x^2$, причем*

$$\sup_{s\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}} |\partial h(s, x)/\partial x| \leqslant M_0 < \infty, \tag{12.49}$$

Тогда для процесса $Y_t = h(t, X_t)$, $t \geqslant 0$, имеем

$$dY_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{12.50}$$

где $(dX_t)^2$ выписывается с помощью (12.48), исходя из ***правила:***

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt. \tag{12.51}$$

Иначе говоря, п.н. для всех $z \geqslant 0$

$$h(z,X_z) = h(0,X_0) + \int\limits_0^z f(s,X_s)\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s)dW_s +$$
$$+ \int\limits_0^z \left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,X_s) + g\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}f^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s,X_s)\right) ds. \quad (12.52)$$

Мы докажем эту теорему, а затем обратимся к примерам ее применения.

Лемма Д12.13. *Пусть в условиях теоремы* **??** *функции f и g простые, т. е.*

$$f(s,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s), \quad g(s,\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} g_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s), \quad (12.53)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = z$, $f_j = f(t_j,\omega)$ и $g_j = g(t_j,\omega)$ являются $\mathcal{F}_{t_j}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми величинами, причем

$$\mathsf{E}f_j^2 < \infty, \quad j = 0,\ldots,m. \quad (12.54)$$

Тогда справедлива формула (12.52).

□ В силу линейности интегралов Лебега и Ито для доказательства (12.52) достаточно проверить, что

$$h(t_{j+1},X_{t_{j+1}}) - h(t_j,X_{t_j}) = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,X_s) + g_j\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}f_j^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s,X_s)\right) ds +$$
$$+ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f_j\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s)\,dW_s, \quad j = 0,\ldots,m-1. \quad (12.55)$$

Возьмем произвольное $j \in \{0,\ldots,m-1\}$ и для упрощения записи положим $u = t_j$, $v = t_{j+1}$. Из (12.46) и (12.53) имеем

$$X_t = X_s + (W_t - W_u)f_j + (t-u)g_j, \quad t \in [u,v]. \quad (12.56)$$

Рассмотрим последовательность разбиений $[u,v]$ точками $u = s_0^{(n)} < \ldots < s_n^{(n)} = v$, для которых

$$\delta_n = \max_{i=0,\ldots,n-1}(s_{i+1}^{(n)} - s_i^{(n)}) \to 0, \quad n \to \infty. \quad (12.57)$$

Прогрессивно измеримая функция $a_j(s,\omega) = f_j(\omega)\dfrac{\partial h(s,X_s(\omega))}{\partial x}$ является п.н. непрерывной на $[u,v]$ (X_s — прогрессивно измеримая непрерывная п.н. функция, см. (12.56), и $\partial h/\partial x$ непрерывна по паре аргументов). Действительно, из (12.49) и (12.54) имеем $|a_j(s,\omega)| \leqslant M_0|f_j| \in L^2(\Omega)$. Кроме того, $a_j(s,\omega)$ непрерывна на $[u,v]$ и в среднем квадратическом. Следовательно, по теореме 12.10 (по ее аналогу для интеграла от u до v)

$$\int\limits_u^v f_j\frac{\partial h}{\partial x}dW_s = \operatorname*{l.i.m.}_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_j\frac{\partial h}{\partial x}(s_i,X_{s_i})(W_{s_{i+1}} - W_{s_i}), \quad (12.58)$$

здесь и далее для упрощения обозначений пишем s_i вместо $s_i^{(n)}$.

Итак, достаточно доказать, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(h(s_{i+1},X_{s_{i+1}})-h(s_i,X_{s_i})-f_j\frac{\partial h}{\partial x}(s_i,X_{s_i})(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})\right)\to$$
$$\to\int_u^v\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,X_s)+g_j\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s)+\frac{1}{2}f_j^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s,X_s)\right)ds \quad \text{п.н.} \quad (12.59)$$

для некоторой измельчающейся подпоследовательности разбиений, т. е. для последовательности $\{n_k\}$, где $\delta_{n_k}\to 0$ при $k\to\infty$.

Теперь заметим, что

$$h(s_{i+1},X_{s_{i+1}})-h(s_i,X_{s_i})=$$
$$=(h(s_{i+1},X_{s_{i+1}})-h(s_i,X_{s_{i+1}}))+(h(s_i,X_{s_{i+1}})-h(s_i,X_{s_i}))=\Delta_i^{(1)}+\Delta_i^{(2)}. \quad (12.60)$$

Применяя к $\Delta_i^{(1)}$ формулу Тейлора по первому аргументу, а к $\Delta_i^{(2)}$ — по второму, получим

$$\Delta_i^{(1)}+\Delta_i^{(2)}=\frac{\partial h}{\partial t}(\widetilde{s}_i,X_{s_{i+1}})(s_{i+1}-s_i)+\frac{\partial h}{\partial x}(s_i,X_{s_i})(X_{s_{i+1}}-X_{s_i})+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,\widetilde{X}_{s_i})(X_{s_{i+1}}-X_{s_i})^2, \quad i=0,\ldots,n-1, \quad (12.61)$$

где $\widetilde{s}_i=\widetilde{s}_i(\omega)\in(s_i,s_{i+1})$, а $\widetilde{X}_{s_i}(\omega)$ — точка между $X_{s_i}(\omega)$ и $X_{s_{i+1}}(\omega)$. Отметим, что мы не можем утверждать, что $\widetilde{s}_i$ и $\widetilde{X}_{s_i}$ являются случайными величинами, но так как $\Delta_i^{(1)}$ — случайная величина, то $\dfrac{\partial h}{\partial t}(\widetilde{s}_i(\omega),X_{s_{i+1}}(\omega))$ — случайная величина. Аналогично, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,\widetilde{X}_{s_i})$ — случайная величина (если $X_{s_i}(\omega)=X_{s_{i+1}}(\omega)$, то полагаем $\widetilde{X}_{s_i}(\omega)=X_{s_i}(\omega)$ в (12.61)).

Принимая во внимание (12.56), (12.61), видим, что левая часть (12.59) приобретает вид

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\frac{\partial h}{\partial t}(\widetilde{s}_i,X_{s_{i+1}})(s_{i+1}-s_i)+\frac{\partial h}{\partial x}(s_i,X_{s_i})g_j(s_{i+1}-s_i)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,\widetilde{X}_{s_i})\times$$
$$\times[f_j^2(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2+2f_jg_j(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})(s_{i+1}-s_i)+g_j^2(s_{i+1}-s_i)^2]\Big). \quad (12.62)$$

Для завершения доказательства леммы 12.13 нам понадобится

Лемма Д12.14. *Пусть процесс X_s непрерывен п.н. на $[u,v]$, и пусть функция G непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}$. Тогда*

$$M(G;\delta)=\sup\{|G(s,X_s)-G(r,X_q)|:\ s,r,q\in[u,v],$$
$$|s-r|<\delta,\ |r-q|<\delta\}\to 0 \quad \textit{п.н. при } \delta\to 0. \quad (12.63)$$

□ Функция $X_s(\omega)$ для п.в. ω равномерно непрерывна на $[u,v]$. Следовательно, для $\omega\in\Omega_0$ ($P(\Omega_0)=1$) и $t\in[u,v]$ имеем $|X_t(\omega)|\leqslant L(\omega)<\infty$. Для каждого $L>0$ функция $G(s,x)$ равномерно непрерывна на прямоугольнике $[u,v]\times[-L,L]$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется $\nu=\nu(\varepsilon,L)>0$, такое что $|G(s,x)-G(r,y)|\leqslant\varepsilon$, если

$|s-r| \leqslant \nu$ и $|x-y| \leqslant \nu$. Остается учесть, что для любого $\nu > 0$ и $\omega \in \Omega_0$ существует $\delta = \delta(\nu, \omega) > 0$, такое что

$$\sup_{\substack{s,q\in[u,v]\\ |s-q|<\delta(\nu,\omega)}} |X_s(\omega) - X_q(\omega)| \leqslant \nu. \ \square \tag{12.64}$$

Продолжим доказательство леммы 12.13. По лемме 12.14 для непрерывной функции $\partial h/\partial t$ имеем

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial t}(\widetilde{s}_i, X_{s_{i+1}})(s_{i+1}-s_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial t}(s_i, X_{s_i})(s_{i+1}-s_i) \right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{\partial h}{\partial t}; \delta_n\right)(v-u) \to 0 \ \text{ п.н. при } \delta_n \to 0. \tag{12.65}$$

Учитывая непрерывность $\partial h/\partial t$ и п.н. непрерывность X_t, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial t}(s_i, X_{s_i})(s_{i+1}-s_i) \to \int_u^v \frac{\partial h}{\partial t}(s, X_s)\,ds \ \text{ п.н. при } \delta_n \to 0. \tag{12.66}$$

В силу непрерывности $\partial h/\partial x$ видим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x}(s_i, X_{s_i}) g_j (s_{i+1}-s_i) \to \int_u^v \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) g_j\,ds \ \text{ п.н. при } \delta_n \to 0. \tag{12.67}$$

Броуновское движение равномерно непрерывно на $[u, v]$, поэтому

$$\left| f_j g_j \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i, \widetilde{X}_{s_i})(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})(s_{i+1}-s_i) \right| \leqslant$$
$$\leqslant C(\omega)|f_j g_j|(v-u) \sup_{\substack{y,r\in[u,v]\\ |y-r|\leqslant\delta_n}} |W_y - W_r| \to 0 \ \text{ п.н. при } \delta_n \to 0, \tag{12.68}$$

где

$$C(\omega) = \max\{|\partial^2 h(t,x)/\partial x^2| : \ t \in [u,v], \ |x| \leqslant \max_{t\in[u,v]} |X_t(\omega)|\}. \tag{12.69}$$

Аналогично,

$$\left| g_j^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i, \widetilde{X}_{s_i})(s_{i+1}-s_i)^2 \right| \leqslant g_j^2 C(\omega)(v-u)\delta_n \to 0 \ \text{ п.н.} \tag{12.70}$$

Теперь докажем, что для некоторой измельчающейся подпоследовательности $\{n_k\}$ разбиений $[u, v]$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i, \widetilde{X}_{s_i})(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2 \to \int_u^v \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s, X_s)\,ds \ \text{ п.н.} \tag{12.71}$$

По лемме 12.14 имеем

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,\widetilde{X}_{s_i})(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,X_{s_i})(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2\right|\leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2};\delta_n\right)\sum_{i=0}^{n-1}(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2\to 0\ \text{ п.н. при }\delta_{n_k}\to 0,\quad (12.72)$$

поскольку легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2\xrightarrow{L^2(\Omega)} v-u\ \text{ при }\ \delta_n\to 0.\quad (12.73)$$

Действительно, учитывая независимость приращений винеровского процесса, получаем

$$\mathsf{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2-(s_{i+1}-s_i)\right|^2=\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{D}(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2=$$
$$=2\sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1}-s_i)^2\leqslant 2(v-u)\delta_n.\quad (12.74)$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой в (12.73) имеет место сходимость п.н.

Далее,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2 h(s_i,X_{s_i})}{\partial x^2}(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2 h(s_i,X_{s_i})}{\partial x^2}(s_{i+1}-s_i)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C(\omega)\sum_{i=0}^{n-1}\left|(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2-(s_{i+1}-s_i)\right|.\quad (12.75)$$

$C(\omega)$ определяется формулой (12.69), и аналогично (12.74),

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|(W_{s_{i+1}}-W_{s_i})^2-(s_{i+1}-s_i)\right|\right)^2\leqslant 2(v-u)\delta_n.$$

Поэтому существует $\{n_k'\}\subset\{n_k\}$, для которой правая часть формулы (12.75) сходится к 0 п.н. при $k\to\infty$ (будем писать n_k вместо n_k'). Наконец, в силу непрерывности $\partial^2 h/\partial x^2$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s_i,X_{s_i})(s_{i+1}-s_i)\to\int_u^v\frac{\partial h}{\partial x}(s,X_s)\,ds\ \text{ п.н. при }\delta_n\to 0.\quad (12.76)$$

Таким образом, все требуемые соотношения выполнены п.н. по подпоследовательности $\{n_k\}$ при $k\to\infty$. Остается заметить, что если $\xi_{n_k}\xrightarrow{\text{п.н.}}\xi$, $\zeta_{n_k}\xrightarrow{\text{п.н.}}\zeta$ и $\xi_{n_k}=\zeta_{n_k}$ п.н., то $\xi=\zeta$ п.н. Лемма 12.13 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 12.12. По лемме 12.8 найдется последовательность простых функций $f^{(n)}\to f$ при $n\to\infty$ в пространстве $\mathcal{L}^2([0,\infty))$. Аналогично лемме 12.8, учитывая (12.47), строим последовательность простых функций $g^{(n)}$, сходящуюся для п.в. ω к функции g в пространстве $L^1([0,\infty))$.

Положим для $t \geqslant 0$

$$X_t^{(n)} = X_0 + \int\limits_0^t f^{(n)}(s,\omega)\,dW_s + \int\limits_0^t g^{(n)}(s,\omega)\,ds. \tag{12.77}$$

По лемме 12.13 п.н. для всех $z \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$h(z, X_z^{(n)}) - h(0, X_0) = \int\limits_0^z \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) f^{(n)}(s,\omega)\,dW_s +$$

$$+ \int\limits_0^z \left(\frac{\partial h}{\partial t}(s, X_s^{(n)}) + g^{(n)}(s,\omega) \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) + \frac{1}{2}(f^{(n)}(s,\omega))^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s, X_s^{(n)}) \right) ds. \tag{12.78}$$

Докажем, что левая и правая части формулы (12.78) **для некоторой подпоследовательности** $\{n_k\}$ **сходятся по вероятности соответственно к левой и правой частям формулы** (12.52). Применяя теорему 12.11 и неравенство (5.29), для любых положительных ε, z имеем

$$P(\sup_{0 \leqslant s \leqslant z} |X_s^{(n)} - X_s| \geqslant \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant z} \left| \int\limits_0^s (f^{(n)} - f) dW_s \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right) + P\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant z} \left| \int\limits_0^s (g^{(n)} - g) ds \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \mathsf{E} \int\limits_0^z (f^{(n)} - f)^2\,ds + P\left(\int\limits_0^z |g^{(n)} - g| ds \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12.79}$$

В силу непрерывности h получаем, что для любого $z \geqslant 0$

$$h(z, X_z^{(n)}) - h(0, X_0) \xrightarrow{P} h(z, X_z) - h(0, X_0). \tag{12.80}$$

Согласно (12.31), (12.49) учитывая прогрессивную измеримость процессов X_t и $X_t^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$), имеем

$$\mathsf{E} \left| \int\limits_0^z \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) f^{(n)}(s,\omega) dW_s - \int\limits_0^z \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) f(s,\omega) dW_s \right|^2 =$$

$$= \int\limits_0^z \mathsf{E} \left(\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) f^{(n)}(s,\omega) - \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) f(s,\omega) \right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^z \mathsf{E} \left(\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) \right)^2 (f^{(n)}(s,\omega) - f(s,\omega))^2 ds +$$

$$+ 2 \int\limits_0^z \mathsf{E}(f(s,\omega))^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) - \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) \right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant 2M_0^2 \int\limits_0^z \mathsf{E}(f^{(n)} - f)^2 ds + 2 \int\limits_0^z \mathsf{E}\Delta_n\,ds, \tag{12.81}$$

где

$$\Delta_n(s,\omega) = (f(s,\omega))^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) - \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) \right)^2 \leqslant 4M_0^2 f(s,\omega)^2. \tag{12.82}$$

Кроме того, учитывая непрерывность $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, из (12.79) для каждого $s \geqslant 0$ выводим

$$\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n)}) \xrightarrow{P} \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s), \tag{12.83}$$

и следовательно,

$$\Delta_n(s,\omega) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{12.84}$$

Из (12.84) и (12.82) следует, что $\mathsf{E}\Delta_n(s,\omega) \to 0$, $n \to \infty$, для каждого $s \geqslant 0$, причем $\mathsf{E}\Delta_n(s,\omega) \leqslant 4M^2 \mathsf{E}(f(s,\omega))^2$. Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_0^t \mathsf{E}\Delta(s,\omega)\, ds \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12.85}$$

Теперь покажем, что интегралы по мере Лебега, фигурирующие в правой части (12.78), сходятся по вероятности к соответствующему интегралу в правой части формулы (12.52), если выбрать подходящую подпоследовательность разбиений $[u, v]$.

Учитывая, что $f^{(n)} \to f$ в $\mathcal{L}^2([0,\infty))$, выберем $\{n_k\}$ так, чтобы

$$\int_0^z (f^{(n_k)}(s,\omega) - f(s,\omega))^2 ds \to 0 \ \text{ п.н.}, \quad k \to \infty. \tag{12.86}$$

Применяя (12.79), выберем $\{n_k\}$ так (точнее говоря, надо взять $\{n'_k\} \subset \{n_k\}$), чтобы

$$\sum_k P(\sup_{0 \leqslant s \leqslant z} |X_s^{(n_k)} - X_s| \geqslant 2^{-k}) < \infty. \tag{12.87}$$

Тогда $X_s^{(n_k)}$ сходятся к X_s п.н. равномерно на $[0, z]$. Поэтому с вероятностью 1 имеем

$$\varepsilon_1(n_k, \omega) := \sup_{s \in [0,z]} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n_k)}) - \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) \right| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{12.88}$$

При этом, как в доказательстве леммы Д12.14, мы воспользовались равномерной непрерывностью $\partial h / \partial x$ на каждом прямоугольнике вида $[0, z] \times [-L, L]$. Следовательно,

$$\int_0^z \left| \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n_k)}) - \frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s) \right| ds \leqslant z\varepsilon_1(n_k, \omega) \to 0 \ \text{ п.н. при } k \to \infty. \tag{12.89}$$

Пусть подпоследовательность $\{n_k\}$ выбрана также так, что

$$\varepsilon_2(n_k, \omega) := \int_0^z |g^{(n_k)}(s,\omega) - g(s,\omega)| ds \to 0 \ \text{ п.н.}, \quad k \to \infty, \tag{12.90}$$

(надо взять $\{n''_k\} \subset \{n'_k\}$, но мы будем по-прежнему писать n_k). Тогда в силу (12.88) и (12.90)

$$\int_0^z \left| g^{(n_k)}(s,\omega)\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n_k)}) - g(s,\omega)\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s)\right| ds \leqslant \leqslant \varepsilon_1(n_k,\omega)\int_0^z |g(s,\omega)|ds + \sup_{s\in[0,z]}\left|\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n_k)})\right| \varepsilon_2(n_k,\omega). \quad (12.91)$$

Учитывая (12.47), видим, что правая часть (12.91) стремится к нулю п.н. при $k \to \infty$, поскольку из (12.88) вытекает, что

$$\sup_{s\in[0,z]}\left|\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s^{(n_k)})\right| \to \sup_{s\in[0,z]}\left|\frac{\partial h}{\partial x}(s, X_s)\right| < \infty \ \text{ п.н.} \quad (12.92)$$

Совершенно аналогично (принимая во внимание (12.86) и формулу, получающуюся заменой $\frac{\partial h}{\partial x}$ на $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ в (12.92)) показывается, что при $k \to \infty$

$$\int_0^z \left| (f^{(n_k)}(s,\omega))^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s, X_s^{(n_k)}) - (f(s,\omega))^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(s, X_s)\right| ds \to 0 \ \text{ п.н.} \quad (12.93)$$

Теорема Д12.12 доказана. □

Замечание Д12.15. Имеются глубокие обобщения формулы Ито. Например, если процесс X – непрерывный семимартингал со значениями в $\mathbb{R}^m$, или даже – произвольный семимартингал в $\mathbb{R}^m$ (формула Куниты – Ватанабе). Мы рекомендуем ознакомиться с теоремами 15.19, 15.21 в [?]. Здесь же укажем, что общие результаты позволяют снять ограничение (12.49) (или (13.84) в многомерном случае). К обобщениям формулы Ито (12.50) мы обратимся также в дополнении к лекции 13.

Пример Д12.16. Вычислить

$$\int_0^T W_s\,dW_s. \quad (12.94)$$

□ Воспользуемся теоремой Д12.12, положив $X_t = W_t$ и $h(t,x) = \dfrac{1}{2}x^2$. Очевидно, все условия этой теоремы выполнены. Тогда для $Y_t = h(t, W_t) = \dfrac{1}{2}W_t^2$ имеем

$$dY_t = \frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial x}dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(dW_t)^2 = 0 + W_t\,dW_t + \frac{1}{2}(dW_t)^2 = W_t\,dW_t + \frac{1}{2}dt. \quad (12.95)$$

Следовательно,

$$d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = W_t\,dW_t + \frac{1}{2}dt.$$

Таким образом, в соответствии с интегральной формой записи стохастического дифференциала (см. (12.46)) и т. к. $W_0 = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \int_0^t W_s\,dW_s + \frac{1}{2}t, \quad t \geqslant 0, \quad (12.96)$$

откуда

$$\int\limits_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t. \ \square \tag{12.97}$$

Упр. 12.17. С помощью формулы Ито докажите, что для детерминированной функции $f = f(t)$ из C^1 справедлива формула (12.1). Постройте пример случайной функции $f = f(t, \omega)$, для которой формула (12.1) не имеет места.

Упр. 12.18. Пусть $X_t = \exp\{\alpha t + \beta W_t\}$, $t \geqslant 0$, где $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$ – стандартное броуновское движение, константы $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Найдите dX_t. В частности, для *стохастической экспоненты* $\mathcal{E}(W)_t = e^{W_t - t/2}$ получится $d\mathcal{E}(W)_t = \mathcal{E}(W)_t dW_t$.

Назовем *локальным временем броуновского движения в точке* 0 функцию

$$L_t(\omega) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} |\{s \in [0, t] : W_s(\omega) \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}|, \tag{12.98}$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега, а предел в (12.98) берется (можно доказать, что существует) в смысле сходимости в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Теорема Д12.19 (Танака). *Справедлива формула*

$$|W_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s) dW_s + L_t,\ t > 0, \tag{12.99}$$

где $\mathrm{sgn}x$ *– знак* x*.*

Доказательство этого результата основано на применении формулы Ито к должным образом сглаженной в нуле функции $h(x) = |x|$, см., напр., [?, с. 42], [?, ?]. По поводу обобщений формулы Ито на функции $h \notin C^{1,2}$ см. [?], [?].

Обсудим теперь **некоторые обобщения интеграла Ито** (см. также дополнение к лекции 13). Интегрирование можно определить для функций класса J_1. Говорят, что $f \in J_1$, если $f : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, прогрессивно измерима и

$$P\left(\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty\right) = 1,\ t > 0. \tag{12.100}$$

Идея состоит в том, чтобы подобрать в $\mathcal{L}^2$ последовательность функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, для которых интеграл $I_t(f_n)$ уже построен и таких, что

$$\int_0^t (f(s, \omega) - f_n(s, \omega))^2 ds \xrightarrow{P} 0 \ \text{ при } n \to \infty. \tag{12.101}$$

Отсюда выводится, что последовательность $\{I_t(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ является фундаментальной по вероятности. Следовательно, существует случайная величина, обозначаемая $I_t(f)$, такая, что $I_t(f_n) \xrightarrow{P} I_t(f)$, $n \to \infty$. Предел $I_t(f)$ записывают как $\int_{(0,t]} f(s, \omega) dW_s$, или $(f \cdot W)_t$. Часто броуновское движение обозначают $\{B_t,\ t \geqslant 0\}$, и тогда пишут $(f \cdot B)_t$.

Упр. 12.20. Докажите, что существует последовательность $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, описанная выше в (12.101). Докажите, что если $f \in J_1$, то существует п.н. непрерывная модификация процесса $I_t(f)$, $t \geqslant 0$.

Отметим, что **для $f \in J_1$ процесс $I_t(f)$ не обязан быть мартингалом, но является** *локальным мартингалом*, т.е. существует последовательность моментов остановки таких, что $\tau_n \uparrow \infty$ п.н. $(n \to \infty)$ и для каждого n "остановленные" процессы $I_t^{\tau_n}(f) := I_{t \wedge \tau_n}(f)$, где $t \geqslant 0$, являются мартингалами.

Упр. 12.21. Рассмотрим для $f \in J_1$ процесс

$$Z_t = \exp\{\int_0^t f(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds\},\ t \geqslant 0, \tag{12.102}$$

называаемый "*гирсановской экспонентой*". Докажите, что $dZ_t = Z_t f(t,\omega)dW_t$.

Аналогичным способом можно ввести пространство $J_1([0,T])$ прогрессивно измеримых функций $f: [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих (12.100) при $t \in T$.

Следующая теорема (ср. с теоремой Д12.5), основанная на понятии стохастического интеграла, описывает **структуру броуновских функционалов**.

Теорема Д12.22 (Кларк). *Пусть $X = X(\omega)$ является $\mathcal{F}_T|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой случайной величиной для некоторого $T > 0$, где $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – естественная фильтрация броуновского движения. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $\mathsf{E}X^2 < \infty$, то найдется стохастический процесс

$$f = (f(s,\omega))_{s\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2([0,T])$$

такой, что

$$X = \mathsf{E}X + \int_0^T f(s,\omega)dW_s \quad \text{п.н.} \tag{12.103}$$

2. Если $\mathsf{E}|X| < \infty$, то представление (12.103) *справедливо с некоторым процессом $f \in J_1([0,T])$.*

3. Если X является положительной случайной величиной (т.е. $P(X > 0) = 1$) и $\mathsf{E}X < \infty$, то найдется процесс $f \in J_1[0,T]$ такой, что $X = Z_T\mathsf{E}X$, а величина Z_T определяется согласно (12.102).

Упр. 12.23. Объясните, почему величина X, фигурирующая в теореме Д**??** есть функционал от броуновского движения, т.е. $X(\omega) = g(W(s,\omega),\ 0 \leqslant s \leqslant T)$, где $g: C[0,T] \to \mathbb{R}$ и $g \in \mathcal{B}(C[0,T])|\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Из теоремы 12.22 выводится следующий **результат о структуре броуновских мартингалов**.

Теорема Д12.24 (Кларк). *Пусть $M = (M_t,\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ – квадратично интегрируемый мартингал, фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – та же, что в теореме Д12.22. Тогда*

1. Найдется процесс $f = (f(s,\omega))_{s\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2([0,T])$ такой, что

$$M_t = M_0 + \int_0^t f(s,\omega)dW_s,\ t \in [0,T]. \tag{12.104}$$

2. Если M является локальным мартингалом, то представление (12.104) *справедливо с некоторым процессом $f \in J_1([0,T])$.*

3. Если M является положительным локальным мартингалом, то найдется процесс $f \in J_1([0,T])$ такой, что $M_t = M_0 Z_t$, а Z_t – гирсановская экспонента, $t \in [0,T]$.

Доказательства теорем Д12.22, Д12.24 в различных вариантах даны Кларком [**?**], Ито [**?**], Дубом [**?**], они приведены во многих книгах, см., напр., [**?**], [**?**, **?**], [**?**].

С представлением функционалов от броуновского движения в виде стохастических интегралов связана следующая экстремальная задача. Среди всех моментов остановки τ относительно естественной естественной фильтрации броуновского движения $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$ требуется найти такой момент τ_*, для которого достигается

$$V_* = \inf_{\tau} \mathsf{E}|W_\tau - \max_{0\leqslant s\leqslant 1} W_s|^2.$$

Можно представить себе модель, в которой колебания цен на акции в течении единичного периода времени (например, день) описываются броуновским движением (разумеется, это лишь интерпретация, т.к. цены не бывают отрицательными) и требуется выбрать момент τ_* для самой выгодной в среднем квадратическом смысле имеющихся акций. Заметим, что W_{τ_*} дает смещенную оценку для $\max_{0\leqslant s\leqslant 1} W_s$, поскольку $\mathsf{E}W_{\tau_*} = 0$ и $\mathsf{E}\max_{0\leqslant s\leqslant 1} W_s = \sqrt{2/\pi}$ (поясните в качестве простого упражнения). Поэтому можно обратиться к величине

$$\widetilde{V} = \inf_{a\in\mathbb{R},\tau} \mathsf{E}|W_\tau + a - \max_{0\leqslant s\leqslant 1} W_s|^2.$$

Легко проверить (убедитесь в этом), что

$$\widetilde{V} = V_* - 2/\pi.$$

Положим

$$S_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s, \quad t \in [0,1].$$

Теорема Д12.25 (Ширяев). *Решение приведенной выше задачи дается формулой*

$$\tau_* = \inf\{t \in [0,1]:\ S_t - W_t = z_*\sqrt{1-t}\},$$

где константа z_* находится из уравнения

$$4\Phi(z_*) - 2z_*\phi(z_*) - 3 = 0,$$

здесь Φ и ϕ – соответственно функция распределения и плотность стандартной нормальной величины. При этом $z_* = 1.12\ldots$, $V_* = 2\Phi(z_*) - 1 = 0.73\ldots$.

Ключевую роль при доказательстве этого результата играет представление вида

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} W_s = a + \int_0^1 f(s,\omega)dW_s,$$

где $a = const$ (укажите эту константу) и

$$f(s,\omega) = 2\{1 - \Phi((S_t - W_t)/\sqrt{1-t})\}, \quad s \in [0,1],\ \omega \in \Omega.$$

Обобщению интеграла Ито на функции многих переменных посвящена монография [?]. Приведем только один результат этого направления.

Теорема Д12.26 (Ито). *При всех $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула*

$$\int \ldots \int_{0\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant t} dW_{s_1}\ldots dW_{s_n} = \frac{t^{n/2}}{n!} H_n\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}}\right), \tag{12.105}$$

где H_n – полином Эрмита степени n, т.е.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}),\ n = 0,1,\ldots$$

О приложениях кратных интегралов в предельных теоремах см. [?].

Еще одно **направление обобщений связано с интегрированием по процессам, более общим, нежели броуновское движение**.

Рассмотрим сначала непрерывный квадратично интегрируемый мартингал $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ такой, что $M_0 = 0$. Класс таких мартингалов обозначается $\mathcal{M}_2^c$. Будем предполагать, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет обычным условиям (непрерывна справа и $\mathcal{F}_0$ содержит класс $\mathcal{N}$ множеств, имеющих P-меру нуль).

Упр. 12.27. Докажите, что если $M \in \mathcal{M}_2^c$, то этот процесс имеет неограниченную вариацию на любом отрезке $[0, T]$.

Это упражнение показывает, что интеграл

$$I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega) \tag{12.106}$$

не может быть определен потраекторно, как интеграл Лебега – Стильтьеса.

Согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (иначе говоря, адаптированный) процесс $A = (A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *возрастающим*, если для п.в. ω имеем $A_0(\omega) = 0$, $A_t(\omega)$ – неубывающая функция по $t \in [0, \infty)$ и $\mathsf{E} A_t < \infty$ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Процесс A называется *интегрируемым*, если $\mathsf{E} A_\infty < \infty$, где $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$. Возрастающий процесс $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *естественным*, если для любого ограниченного непрерывного справа мартингала $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

$$\mathsf{E}\int_{(0,t]} M_s dA_s = \mathsf{E}\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s \;\; \text{при каждом } 0 < t < \infty.$$

Обозначим $\mathcal{S}$ – класс моментов остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и $\mathcal{S}_a$ – подкласс моментов остановки τ таких, что $P(\tau \leqslant a) = 1$, где константа $a > 0$. Говорят, что непрерывный справа стохастический процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ входит в класс D, если семейство величин $\{X_\tau\}_{\tau\in\mathcal{S}}$ равномерно интегрируемо и $X \in DL$, если для каждого $0 < a < \infty$ равномерно интегрируемо $\{X_\tau\}_{\tau\in\mathcal{S}_a}$.

Ключевую роль играет следующий фундаментальный результат.

Теорема Д12.28 (разложение Дуба – Мейера). *Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет обычным условиям. Если $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – непрерывный справа субмартингал и $X \in DL$, то*

$$X_t = M_t + A_t, \;\; 0 \leqslant t < \infty, \tag{12.107}$$

где $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – непрерывный справа мартингал, $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – возрастающий процесс. Процесс A может быть выбран естественным и тогда указанное разложение единственно (с точностью до неразличимости, т.е. п.н. совпадения траекторий). Если $X \in D$, то M – равномерно интегрируемый мартингал, а A – интегрируемый процесс.

Упр. 12.29. Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – непрерывный справа субмартингал. Докажите, что $X \in DL$, если выполнено любое из следующих двух условий.

1. $X \geqslant 0$ п.н.
2. X допускает представление вида (12.107).

Наметим схему построения интеграла по процессу $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0} \in \mathcal{M}_2^c$. Пусть $\langle M \rangle$ – возрастающий процесс (компенсатор), участвующий в разложении Дуба

– Мейера субмартингала M_t^2, $t \geqslant 0$ (мы воспользовались теоремой **??** и упражнением **??**).

Процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0, \omega \in \Omega\}$ назовем *простым*, если существует строго возрастающая числовая последовательность $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ с $t_0 = 0$ и $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, а также последовательность действительных случайных величин $\{f_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ и некоторая константа $0 < c < \infty$, для которых $\sup_{n\geqslant 0} |f_n(\omega)| \leqslant c$ при всех $\omega \in \Omega$, причем $f_n \in \mathcal{F}_{t_n}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и

$$X_t(\omega) = f_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega)\mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t),\ 0 \leqslant t < \infty. \tag{12.108}$$

Класс простых процессов обозначим $\mathcal{L}_0$ и для $X \in \mathcal{L}_0$ положим

$$I_t(X) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) + f_n(M_t - M_{t_n}) \ \text{ при } t_n \leqslant t < t_{n+1}. \tag{12.109}$$

Далее доказывается, что определение (12.109) можно распространить (снова используя должные аппроксимации простыми процессами) с $\mathcal{L}_0$ на более широкий класс процессов. Интересно отметить, что этот класс будет звисеть от того, является ли функция $\langle M\rangle_t$ для п.в. ω абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Кроме того, заметим, что интегрирование удается осуществлять и по локально непрерывным мартингалам $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, для которых

$$P(\int_0^T X_t^2(\omega) d\langle M\rangle_t < \infty) = 1 \ \text{ при всех } T > 0.$$

Мы рекомендуем обратиться к книгам [?], [?, ?], [?, ?], [?].

В дополнении к следующей лекции мы коснемся также вопроса об интегралах Фиска – Стратоновича.

Лекция 13. Стохастические дифференциальные уравнения

Уравнение Ланжевена. Аналог теоремы Фубини для интеграла Ито. Винеровский процесс, как частный случай решения уравнения Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

Прежде чем излагать некоторые общие результаты о стохастических дифференциальных уравнениях, мы обратимся к очень важному частному случаю. **Попытаемся описать движение частицы в жидкой среде**. Для этого рассмотрим уравнение

$$m\dot{v} = -\beta v + \text{«шум»}, \quad t \geqslant 0, \tag{13.1}$$

где m — масса частицы, v — ее скорость, параметр $\beta > 0$ характеризует вязкость среды (сила, тормозящая частицу, пропорциональна скорости), наличие «шума» связано с хаотическими соударениями данной частицы с молекулами среды (вследствие теплового движения последних).

Посмотрим, как можно интерпретировать уравнение (13.1), если в качестве шума использовать $\dot{W}$, где $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – броуновское движение (см. (12.2)). Согласно теореме 4.1, выписанная выше производная не существует ни в одной точке с вероятностью единица. Значит, этот формальный объект — достойный кандидат для описания чего-то крайне нерегулярного. Но теперь следует придать смысл получающемуся уравнению

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{W}, \quad t \geqslant 0, \tag{13.2}$$

называемому **уравнением Ланжевена**. Перепишем (13.2) в виде

$$\dot{v} = av + \sigma\dot{W}, \quad t \geqslant 0, \tag{13.3}$$

где

$$a = -\beta/m < 0, \quad \sigma = 1/m > 0. \tag{13.4}$$

Хорошо известно, что решения обыкновенного дифференциального уравнения (с постоянными коэффициентами a, σ)

$$\dot{v} = av + \sigma f, \quad t \geqslant 0, \tag{13.5}$$

находятся применением к решению однородного уравнения $\dot{v} = av$, имеющему вид $v(t) = ce^{at}$ $(c = v(0))$, метода вариации произвольной постоянной, т. е. ищутся в виде $v(t) = c(t)e^{at}$. Таким образом,

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int\limits_0^t e^{a(t-u)}\sigma f(u)\,du, \quad t \geqslant 0 \tag{13.6}$$

(решение существует для $t \in [0, T]$, если, например, f — непрерывная на $[0, T]$ функция).

Теперь заметим, что уравнение (13.5) можно записать в дифференциальной форме

$$dv = av\,dt + \sigma f\,dt, \quad t \geqslant 0, \tag{13.7}$$

что наводит на мысль переписать (13.3) в виде

$$dv = av\,dt + \sigma\,dW(t), \quad t \geqslant 0. \tag{13.8}$$

Весьма плодотворным является подход, когда дифференциальное уравнение заменяется интегральным. Поэтому возникает возможность **понимать** (13.3) **и** (13.8) **как формальную запись интегрального уравнения**

$$\int_0^t dv(s) = \int_0^t av(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW(s), \tag{13.9}$$

где последний член в правой части может трактоваться как интеграл Ито (константа σ, очевидно, входит в класс $\mathcal{L}^2([0,T])$ для любого $T > 0$). В этом случае (13.9) дает

$$v(t) - v(0) = a\int_0^t v(s)\,ds + \sigma W(t). \tag{13.10}$$

Рассуждая аналогично, можно попробовать заменить $f(u)\,du$ в (13.6) на $dW(u)$ и получить

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}\sigma\,dW(u), \tag{13.11}$$

где в правой части фигурирует интеграл Ито (неслучайная функция $e^{-au} \in \mathcal{L}^2([0,t])$ для каждого $t > 0$). Покажем, что функция $v(t)$, определенная в (13.11), является решением уравнения (13.9), равносильного уравнению (13.10). Точнее говоря, **покажем, что если подставить указанное** $v(t)$ **в правую и левую части соотношения** (13.10)**, то они будут равны при каждом** t **с вероятностью единица.** Отсюда последует более сильное утверждение. А именно, в силу теоремы 12.11 найдется $\Omega_0 \subset \Omega$, такое что $P(\Omega_0) = 1$ и для всех $\omega \in \Omega_0$ интеграл в (13.11) будет непрерывен по t. Тогда для всех $\omega \in \Omega_0$ получим, что $\int_0^t v(s)\,ds$ будет непрерывен по t (рассматриваем $t \in [0,T]$). Но тогда левая и правая части формулы (13.10) будут представлять собой непрерывные п.н. процессы, которые для каждого фиксированного t равны п.н. Следовательно, для п.в. ω совпадут их траектории. **Поэтому (сильным) решением стохастического уравнения** (13.9) **можно будет назвать процесс, который с вероятностью единица обеспечивает совпадение траекторий процессов, фигурирующих в левой и правой частях уравнения** (далее мы позаботимся и о других свойствах решения).

Нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 13.1. *Пусть действительная функция* $g(s,u)$*, определенная на* $[0,T] \times [0,T]$*,* $0 < T < \infty$*, такова, что* $g \in L^2([0,T]^2) = L^2([0,T] \times [0,T], \mathcal{A}, \mu \times \mu)$*, где* μ *— мера Лебега на* $[0,T]$*,* $\mathcal{A}$ *– пополнение* $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{B}([0,T])$ *по мере* $\mu \times \mu$*, и*

$$\Delta_n = \int_0^T\!\!\int_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))^2 ds\,du \to 0 \quad \text{при} \quad \delta_n \to 0, \tag{13.12}$$

где для $n \geqslant 1$

$$g_n(s,u) = \sum_{i=0}^{n-1} g(s,u_i^{(n)}) \mathbb{1}_{(u_i^{(n)},u_{i+1}^{(n)}]}(u), \tag{13.13}$$

$0 = u_0^{(n)} < u_1^{(n)} < \ldots < u_n^{(n)} = T$, $\delta_n = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1}(u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)})$. *Тогда с вероятностью* 1

$$\int_0^T \Big(\int_0^T g(s,u)\,ds \Big) dW(u) = \int_0^T \Big(\int_0^T g(s,u)\,dW(u) \Big) ds. \tag{13.14}$$

□ При μ-почти всех $u \in [0,T]$ функция $f(u) = \int\limits_0^T g(s,u)\,ds$ является $\mathcal{B}([0,T])\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой в силу теоремы Фубини. Действительно,

$$\int_0^T \int_0^T |g(s,u)| ds\,du < \infty, \tag{13.15}$$

поскольку $g \in L^2([0,T]^2)$. Кроме того, для μ-п.в. u

$$\Big(\int_0^T g(s,u)\,ds \Big)^2 \leqslant T \int_0^T g^2(s,u)\,ds. \tag{13.16}$$

Поэтому $f \in \mathcal{L}^2([0,T])$ как неслучайная функция, интегрируемая в квадрате на $[0,T]$. Следовательно, левая часть формулы (13.14) существует.

Функция $J(s,\omega) = \int\limits_0^T g(s,u)\,dW(u)$ для п.в. ω является $\mathcal{B}([0,T])\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой. Это снова вытекает из теоремы Фубини, поскольку

$$\int_0^T \mathsf{E}|J(s,\omega)|\,ds < \infty. \tag{13.17}$$

Последнее неравенство верно, т. к.

$$\mathsf{E}|J(s,\omega)|^2 = \int_0^T g^2(s,u)\,du, \tag{13.18}$$

а мера $\mu \times P$ — конечная мера на (пополнении) $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}$.

Согласно (12.13)

$$\int_0^T \Big(\int_0^T g_n(s,u)\,dW(u) \Big) ds = \int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{n-1} g_n(s,u_i^{(n)})(W(u_{i+1}^{(n)}) - W(u_i^{(n)})) \Big) ds =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (W(u_{i+1}^{(n)}) - W(u_i^{(n)})) \int_0^T g_n(s,u_i^{(n)}) ds. \tag{13.19}$$

В силу теоремы Фубини $\int\limits_0^T g(s,u)\,ds$ существует для μ-почти всех $u \in [0,T]$. Если $\int\limits_0^T g(s,u_i^{(n)})ds$ не существует, то полагаем его во всех формулах равным нулю.

Пользуясь линейностью интеграла Ито, имеем

$$\int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T g_n(s,u)\,ds\Biggr) dW(u) = \int\limits_0^T \Biggl(\sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_0^T g(s,u_i^{(n)})ds \mathbb{1}_{[u_i^{(n)},u_{i+1}^{(n)})}(u)\Biggr) dW(u) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} (W(u_{i+1}^{(n)}) - W(u_i^{(n)})) \int\limits_0^T g(s,u_i^{(n)})ds. \quad (13.20)$$

Итак, для функции $g = g_n$ формула (13.14) установлена.

Снова пользуясь теоремой Фубини, а также неравенствами Ляпунова, Коши–Буняковского–Шварца, (12.31) и (13.12), получаем, что

$$\mathsf{E}\Biggl| \int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T g(s,u)\,dW(u)\Biggr) ds - \int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T g_n(s,u)\,dW(u)\Biggr) ds\Biggr| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^T \mathsf{E}\Biggl|\int\limits_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))dW(u)\Biggr| ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^T \Biggl[\mathsf{E}\Biggl(\int\limits_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))\,dW(u)\Biggr)^2\Biggr]^{1/2} ds = \\ = \int\limits_0^T \Biggl[\int\limits_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))^2 du\Biggr]^{1/2} ds \leqslant (T\Delta_n)^{1/2} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (13.21)$$

Аналогичным образом находим

$$\mathsf{E}\Biggl| \int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T g(s,u)\,ds\Biggr) dW(u) - \int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T g_n(s,u)\,ds\Biggr) dW(u)\Biggr| \leqslant \\ \leqslant \Biggl[\mathsf{E}\Biggl(\int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))\,ds\Biggr) dW(u)\Biggr)^2\Biggr]^{1/2} = \\ = \Biggl[\int\limits_0^T \Biggl(\int\limits_0^T (g(s,u) - g_n(s,u))ds\Biggr)^2 du\Biggr]^{1/2} \leqslant (T\Delta_n)^{1/2}. \quad (13.22)$$

Для завершения доказательства следует воспользоваться следующим элементарным утверждением. Если $\xi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi$, $\zeta_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta$ при $n \to \infty$ и $\xi_n = \zeta_n$ п.н. для $n \in \mathbb{N}$, то $\xi = \zeta$ п.н. $\square$

Вернемся к уравнению Ланжевена. Имеем

$$a\int\limits_0^t v(s)\,ds = a\Big\{v(0)\int\limits_0^t e^{as}ds + \sigma\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^s e^{a(s-u)}dW(u)\Big)ds\Big\} =$$

$$= v(0)(e^{at}-1) + a\sigma\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^t e^{a(s-u)}\mathbb{1}_{(0,s]}(u)dW(u)\Big)ds. \quad (13.23)$$

В силу леммы 13.1 для каждого $t \geqslant 0$ почти наверное справедливы равенства

$$\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^t e^{a(s-u)}\mathbb{1}_{(0,s]}(u)dW(u)\Big)ds = \int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^t e^{a(s-u)}\mathbb{1}_{(0,s]}(u)\,ds\Big)dW(u) =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-au}\Big(\int\limits_u^t e^{as}\,ds\Big)dW(u) = \frac{1}{a}\int\limits_0^t e^{a(t-u)}dW(u) - \frac{1}{a}\int\limits_0^t dW(u). \quad (13.24)$$

Мы учли, что для функции $g(s,u) = e^{a(s-u)}\mathbb{1}_{(0,s]}(u)$, где $s,u \in [0,T]$, выполнено условие (13.12) при любом выборе разбиений отрезка $[0,T]$ точками $u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_n^{(n)}$, если $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Действительно, принимая во внимание равномерную непрерывность и ограниченность $e^{a(s-u)}$ на $[0,T]\times[0,T]$, устанавливаем оценку

$$\Delta_n \leqslant \varepsilon_n^2 \sum_{0\leqslant i<k\leqslant n}(u_{k+1}^{(n)}-u_k^{(n)})(u_{i+1}^{(n)}-u_i^{(n)}) + e^{2aT}\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}^{(n)}-u_i^{(n)})^2 \leqslant \varepsilon_n^2T^2 + T\delta_n e^{2aT},$$

где $\varepsilon_n = \sup\{|e^{a(s-u)} - e^{a(x-y)}|:\ |s-x| \leqslant \delta_n,\ |u-y| \leqslant \delta_n,\ s,u,x,y \in [0,T]\}$.

Следовательно, правая часть формулы (13.10) в силу (13.23) и (13.24) приобретает вид

$$v(0)(e^{at}-1) + \sigma\int\limits_0^t e^{a(t-u)}dW(u) - \sigma W(t) + \sigma W(t) = v(t) - v(0) \qquad (13.25)$$

согласно (13.11). Таким образом, доказана

Теорема 13.2. *Для всех $t \geqslant 0$ существует сильное (п.н. непрерывное) решение уравнения Ланжевена с начальным условием $v|_{t=0} = v(0)$, которое задается формулой* (13.11).

Замечание 13.3. Если в уравнении (13.2) отсутствует вязкость (т. е. $\beta = 0$, а следовательно, и $a = 0$ в силу (13.4)), то при $v(0) = 0$ и $\sigma = 1$ (т. е. $m = 1$) из (13.11) получаем, что $v(t) = W(t)$. Таким образом, **винеровский процесс получается как частный случай решения уравнения Ланжевена**.

Пусть существует $\mathsf{E}v(0)$. Тогда, учитывая (12.31), из (13.11) выводим, что

$$\mathsf{E}v(t) = e^{at}\mathsf{E}v(0), \qquad (13.26)$$

т. е. средняя скорость, согласно (13.4), экспоненциально убывает.

Теорема 13.4. *Пусть* $v(0) \sim \mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$, *где* $\alpha = -a$, *и пусть* $v(0)$ *является* $\mathcal{F}_0\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-*измеримой величиной. Тогда решением уравнения Ланжевена является* ***процесс Орнштейна–Уленбека***, *т. е. гауссовский процесс* $v(t)$, $t \geqslant 0$, *имеющий среднее нуль и ковариационную функцию*

$$\operatorname{cov}(v(s), v(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}, \quad s, t \geqslant 0. \tag{13.27}$$

□ Из (13.26) следует, что $\mathsf{E}v(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Для $s, t \geqslant 0$ имеем

$$\mathsf{E}v(s)v(t) = \mathsf{E}(v(0))^2 e^{a(s+t)} + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(s+t)}(1 - e^{-2a(s\wedge t)}). \tag{13.28}$$

Мы учли, что в силу (12.33), (12.31) и (12.8)

$$\mathsf{E}\left(\int_0^s e^{a(s-u)} dW(u) \int_0^t e^{a(t-u)} dW(u)\right) = \int_0^{s\wedge t} e^{a(s-u)} e^{a(t-u)} du = \frac{e^{a(s+t)}}{2a}(1 - e^{-2a(s\wedge t)}), \tag{13.29}$$

а также то, что для всех $t \geqslant 0$ согласно (12.38)

$$\mathsf{E}v(0) \int_0^t e^{a(t-u)} dW(u) = \mathsf{E}\left(v(0)\mathsf{E}\left(\int_0^t e^{a(t-u)} dW(u) \mid \mathcal{F}_0\right)\right) = 0. \tag{13.30}$$

Если $\mathsf{E}(v(0))^2 = -\dfrac{\sigma^2}{2a}$, то из (13.28) получаем (13.27).

Докажем гауссовость $v(t)$, $t \geqslant 0$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и всех $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_k \leqslant T$ вектор $(v(0), X(t_1), \ldots, X(t_k))$, где $X(t) = \int\limits_0^t e^{a(t-u)} dW(u)$, является гауссовским. Действительно, для каждого t_m ($m = 1, \ldots, k$) величина $X(t_m)$ есть предел в $L^2(\Omega)$ при $n \to \infty$ величин вида $Ih_n^{(m)}$, где $h_n^{(m)}$ — неслучайные простые функции (см., например, теорему 12.10). Вектор $(Ih_n^{(1)}, \ldots, Ih_n^{(k)})$ является гауссовским, т. к. $\sum\limits_{m=1}^k c_m Ih_n^{(m)}$ для любых $c_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, \ldots, k$, есть гауссовская величина (может быть представлена как линейная комбинация независимых гауссовских величин). Пользуясь тем, что $v(0)$ является $\mathcal{F}_0\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой гауссовской величиной, получаем, что $(v(0), Ih_n^{(1)}, \ldots, Ih_n^{(k)})$ — гауссовский вектор. Это сразу вытекает из формулы

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{iv(0)\lambda_0 + i\sum_{m=1}^k \lambda_m Ih_n^{(m)}\right\} = \mathsf{E}e^{iv(0)\lambda_0}\mathsf{E}(e^{i\sum_{m=1}^k \lambda_m Ih_n^{(m)}} \mid \mathcal{F}_0) = \\ = \mathsf{E}e^{iv(0)\lambda_0}\mathsf{E}e^{i\sum_{m=1}^k \lambda_m Ih_n^{(m)}}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 0, \ldots, k.\end{aligned} \tag{13.31}$$

Совершив предельный переход в $L^2(\Omega)$, получаем требуемое утверждение. □

Следующий естественный шаг состоит в том, чтобы в стохастическом уравнении коэффициенты при dt **и** $dW(t)$ **сделать случайными,** т. е. зависящими и от ω. Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{gathered} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ X_0 = Z, \end{gathered} \tag{13.32}$$

которое понимается просто как формальная запись интегрального уравнения

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13.33}$$

где b и σ определены на $[0,T] \times \mathbb{R}$. **Сильное решение** последнего **понимается как такая прогрессивно измеримая функция** $X_t(\omega)$**, имеющая п.н. непрерывные траектории, которая для любого** $t \geqslant 0$ **при подстановке ее в левую и правую части формулы** (13.33) **дает равенство с вероятностью 1**. При этом считается, что $b(s, X_s)$ и $\sigma(s, X_s)$ — прогрессивно измеримые функции, такие что $\sigma(s, X_s) \in \mathcal{L}^2([0,T])$, а $b(s, X_s)$ интегрируема по Лебегу на любом конечном промежутке для п.в. ω.

Потребуем, чтобы функции $b(u,x)$ и $\sigma(u,x)$ были измеримы на $[0,t] \times \mathbb{R}$ (т.е. $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримы) при каждом $t \in [0,T]$, и чтобы выполнялось условие Липшица: существует константа $L > 0$, такая что

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant L|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]. \tag{13.34}$$

Пусть также для некоторого $c > 0$

$$b(t,x)^2 + \sigma(t,x)^2 \leqslant c(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]. \tag{13.35}$$

Заметим, что даже при $\sigma \equiv 0$, т. е. при изучении обыкновенного дифференциального уравнения без условий такого рода, решение может не существовать или существовать, но быть неединственным. Если, в частности, $b(t,x) = b(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, то (13.34) влечет (13.35).

Далее нам понадобится простая

Лемма 13.5. *Пусть действительный процесс $Y_s(\omega)$ прогрессивно измерим на $[0,T]$ (относительно фильтрации $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,T]}$ в $\mathcal{F}$). Пусть действительная функция $a(s,x)$ задана на $[0,T] \times \mathbb{R}$ и при каждом $t \in [0,T]$ она измерима на $[0,t] \times \mathbb{R}$, т.е. $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измерима. Тогда процесс $a(s, Y_s(\omega))$ прогрессивно измерим (относительно той же фильтрации $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,T]}$).*

□ Для $s \in [0,t]$ и $\omega \in \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ отображение $(s,\omega) \mapsto (s, Y_s(\omega))$ является $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t|\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримым. Возьмем $u \in [0,t]$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тогда

$$\begin{aligned}&\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega :\ (s, Y_s(\omega)) \in [0,u] \times B\} = \\ &\qquad = \{(s,\omega) \in [0, t\wedge u] \times \Omega :\ Y_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0,t\wedge u]) \times \mathcal{F}_{t\wedge u} \subset \mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Требуемая измеримость получается в силу следствия 1.2. Теперь заметим, что для $(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}$ отображение $(s,x) \mapsto a(s,x)$ является по условию $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримым. Остается учесть, что суперпозиция измеримых отображений будет должным образом измерима. □

Теорема 13.6. *Пусть функции b и σ удовлетворяют введенным выше условиям. Пусть величина Z является $\mathcal{F}_0\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримой, причем $\mathsf{E}Z^2 < \infty$. Тогда существует единственное сильное решение уравнения* (13.33) *с начальным условием $X_0 = Z$, такое что $X_t \in L^2(\Omega)$ для любого $t \in [0,T]$ и функция $\mathsf{E}X_t^2$ ограничена на $[0,T]$.*

Единственность понимается в сильном (потраекторном) смысле, т. е. если $X_1(t,\omega)$ и $X_2(t,\omega)$ — решения (13.33) в указанном выше смысле, имеющие одинаковые п.н. начальные условия, то

$$X_1(t,\omega) = X_2(t,\omega) \ \text{ для всех } \ 0 \leqslant t \leqslant T \ \text{ п.н.} \tag{13.36}$$

□ Будем решать (13.33) методом последовательных приближений. Возьмем $X_t^0 = Z$, $t \in [0,T]$ и положим для $n \geqslant 1$

$$X_t^{(n)} = Z + \int\limits_0^t b(s, X_s^{(n-1)})ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)})dW(s). \tag{13.37}$$

Лемма 13.7. *Пусть выполнены условия теоремы 13.6. Тогда при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *процесс* $\{X_t^{(n)},\ t \in [0,T]\}$, *определенный формулой* (13.37), *прогрессивно измерим (т.е. допускает такую модификацию). При этом* $\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^{(n)}|^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *и правая часть* (13.37) *может быть выбрана п.н. непрерывной на* $[0,T]$.

□ Функция $Y_s(\omega) = Z(\omega)$, где $s \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измерима, поскольку $Z \in \mathcal{F}_0|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. По лемме 13.5 процессы $b(s, Z(\omega))$ и $\sigma(s, Z(\omega))$ прогрессивно измеримы ($s \in [0,T]$). В силу (13.35)

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathsf{E}\sigma^2(s,Z) \leqslant c(1 + \mathsf{E}Z^2) < \infty.$$

Следовательно, процесс $\{\sigma(s,Z),\ s \in [0,T]\} \in \mathcal{L}^2([0,T])$ и $\int_0^t \sigma(s,Z)dW_s$ при $t \in [0,T]$ может быть выбран, согласно теореме 12.11, п.н. непрерывным и прогрессивно измеримым. Учитывая прогрессивную измеримость $\{b(s,Z),\ s \in [0,T]\}$, и условие (13.35), имеем

$$\mathsf{E}\int_0^T |b(s,Z)|ds \leqslant (Tc(1 + \mathsf{E}Z^2))^{1/2} < \infty.$$

По теореме Фубини $\int_0^T b(s,Z)ds$ конечен для п.в. ω и для этих ω интеграл $\int_0^t b(s,Z)ds$ будет непрерывен по $t \in [0,T]$. Остается применить лемму 12.12.

Точно так же объясняется прогрессивная измеримость и п.н. непрерывность правой части (13.37) в предположении, что процесс $\{X^{(n-1)}(t),\ t \in [0,T]\}$ прогрессивно измерим и $\sup_{s\in[0,T]} \mathsf{E}|X_s^{(n-1)}|^2 < \infty$. Теперь заметим, что

$$\mathsf{E}(X_t^{(n)})^2 \leqslant 3\Bigg(\mathsf{E}Z^2 + \mathsf{E}\bigg(\int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})ds\bigg)^2 + \mathsf{E}\bigg(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)})dW_s\bigg)^2\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant 3\bigg(\mathsf{E}Z^2 + Tc\int_0^T \mathsf{E}(1 + |X_s^{(n-1)}|^2)ds + c\int_0^T \mathsf{E}(1 + |X_s^{(n-1)}|^2)ds\bigg) \leqslant$$

$$\leqslant 3\Big(\mathsf{E}Z^2 + c(T+1)T\Big(1 + \sup_{s\in[0,T]} \mathsf{E}|X_s^{(n-1)}|^2\Big)\Big) < \infty. \ \square$$

Продолжим доказательство теоремы 13.6. Оценим $\mathsf{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2$. Если $n = 0$, то, пользуясь (12.31) и (13.35), для $t \in [0,T]$ имеем

$$\mathsf{E}|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 = \mathsf{E}\Bigg|\int\limits_0^t b(s,Z)\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s,Z)\,dW_s\Bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{E}\Big(\int_0^t b(s,Z)\,ds\Big)^2 + 2\mathsf{E}\Big(\int_0^t \sigma(s,Z)\,dW_s\Big)^2 \leqslant 2(t+1)\mathsf{E}\int_0^t c(1+|Z|^2)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2ct(t+1)(1+\mathsf{E}Z^2) \leqslant M_1 t, \quad M_1 = 2c(T+1)(1+\mathsf{E}Z^2). \tag{13.38}$$

Для $n \geqslant 1$ и $t \in [0,T]$, учитывая (13.34), получаем

$$\mathsf{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{E}\Big(\int_0^t b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{E}\Big(\int_0^t L|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|ds\Big)^2 + 2\mathsf{E}\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant 2L^2(1+T)\int_0^t \mathsf{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds. \tag{13.39}$$

Из (13.38) и (13.39) по индукции заключаем, что при $M = \max\{M_1, 2L^2(1+T)\}$

$$\mathsf{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leqslant \frac{M^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad t \in [0,T]. \tag{13.40}$$

Теперь заметим, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leqslant \int_0^T |b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})|ds +$$

$$+ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\Big|.$$

Пользуясь теоремой 12.11, следствием 5.17 и оценкой (13.40), приходим к неравенствам

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n}) \leqslant P\Big(\Big(\int_0^T |b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})|ds\Big)^2 > 2^{-2n-2}\Big) +$$

$$+ P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\Big| > 2^{-n-1}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n+2}T\int_0^T \mathsf{E}(b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)}))^2 ds +$$

$$+ 2^{2n+2}\int_0^T \mathsf{E}|\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})|^2 ds \leqslant 2^{2n+2}L^2(T+1)\int_0^T \frac{M^n s^n}{n!}ds \leqslant \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{13.41}$$

По лемме Бореля–Кантелли из (13.41) следует, что

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n} \text{ бесконечно часто}) = 0. \tag{13.42}$$

Поэтому для п.в. ω существует $N_0 = N_0(\omega)$: $\forall n \geqslant N_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leqslant 2^{-n}. \qquad (13.43)$$

Следовательно, последовательность

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1}(X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega)), \qquad (13.44)$$

состоящая из п.н. непрерывных функций на $[0,T]$, с вероятностью 1 равномерно сходится на этом отрезке. Для $\omega \in \Omega_0 \subset \Omega$ $(P(\Omega_0) = 1)$ – множестве, где все $X_t^{(n)}$ непрерывны на $[0,T]$ и равномерно сходятся, обозначим $X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}(\omega)$. Для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ и $t \in [0,T]$ пусть $X_t(\omega) = 0$. Отсюда вытекает, что $X_t(\omega)$ является непрерывной функцией для всех ω. Величина $X_t \in \mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ в силу замечания 4.7, как предел величин $X_t^{(n)}$, являющихся $\mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми (все σ-алгебры пополнены). **Прогрессивная измеримость процесса** $\{X_t,\, t \in T\}$ **вытекает** (лемма 12.12) **из его непрерывности и согласованности с фильтрацией** $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Теперь заметим, что для $m > n \geqslant 0$ и $t \in [0,T]$ в силу (13.40)

$$(\mathsf{E}|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^2)^{1/2} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \qquad (13.45)$$

В силу полноты $L^2(\Omega)$ существует предел в $L^2(\Omega)$ величин $X_t^{(n)}$ при $n \to \infty$. Этот предел обозначим Y_t. Очевидно, $Y_t = X_t$ п.н. при каждом $t \in [0,T]$. Покажем, что X_t есть решение уравнения (13.33).

Из (13.45) для всех $t \in [0,T]$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|X_t^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|Z\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2} = \|Z\|_{L^2(\Omega)} + c(M,T). \qquad (13.46)$$

Поэтому и

$$\|X_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|Z\| + c(M,T) \ \text{ для } t \in [0,T]. \qquad (13.47)$$

Пользуясь теоремой Фубини и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости с учетом (13.46), (13.47) получаем

$$\mathsf{E}\int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds = \int_0^T \mathsf{E}(X_s - X_s^{(n)})^2 ds \to 0 \ \text{ при } n \to \infty. \qquad (13.48)$$

В силу (13.34) и (13.48) для каждого $t \in [0,T]$ при $n \to \infty$

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dW_s \xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \qquad (13.49)$$

и

$$\int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds \xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t b(s, X_s)\, ds. \qquad (13.50)$$

Таким образом, переходя к пределу в (13.37) по подпоследовательности $\{n_m = n_m(t)\}$, для которой в (13.49) и (13.50) имеет место п.н. сходимость, получаем (13.33).

Заметим теперь, что решение X_t непрерывно на $[0,T]$ по норме пространства $L^2(\Omega)$. Действительно, $X_t - X_s \to 0$ п.н. при $t \to s$ ($t, s \in [0,T]$) и $\mathsf{E}(X_t - X_s)^2 \leqslant const$ в силу (13.47). Остается сослаться на теорему Беппо Леви.

Докажем единственность решения. Пусть X_t – сильное решение (13.33) с начальным условием $X_0 = Z$, а $\widetilde{X}_t$ – сильное решение (13.33) с начальным условием $\widetilde{X_0} = \widetilde{Z}$, причем $\mathsf{E}X_t^2$ и $\mathsf{E}\widetilde{X}_t^2$ ограничены на $[0,T]$. Аналогично (13.39) находим, что

$$\mathsf{E}|X_t-\widetilde{X}_t|^2 \leqslant 3\mathsf{E}|Z-\widetilde{Z}|^2+3\mathsf{E}\left(\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,\widetilde{X}_s)ds\right)^2+3\mathsf{E}\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,\widetilde{X}_s)dW_s\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3\mathsf{E}|Z-\widetilde{Z}|^2 + 3(1+t)L^2\int_0^t \mathsf{E}|X_s-\widetilde{X}_s|^2 ds. \tag{13.51}$$

Снова с помощью теоремы Беппо Леви видим, что X_t и $\widetilde{X}_t$ непрерывны на $[0,T]$ по норме пространства $L^2(\Omega)$. Итак, для непрерывной функции $y(t) = \mathsf{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2$ имеем

$$y(t) \leqslant c_0 + Q\int_0^t y(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{13.52}$$

где $c_0 = \mathsf{E}|Z-\widetilde{Z}|^2$, $Q = 3(1+T)L^2$.

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 13.8 (Гронуол). *Пусть y – неотрицательная непрерывная на $[0,T]$ функция, удовлетворяющая неравенству* (13.52) *с некоторыми константами $c_0 \geqslant 0$ и $Q \geqslant 0$. Тогда*

$$y(t) \leqslant c_0\exp(Qt), \quad \textit{при } t \in [0,T]. \tag{13.53}$$

□ Учитывая (13.52), имеем для $t \geqslant 0$ (в нуле правая производная)

$$\left(\log\left(c_0 + Q\int_0^t y(s)ds\right)\right)' = \frac{Qy(t)}{c_0 + Q\int_0^t y(s)ds} \leqslant Q. \tag{13.54}$$

Интегрируя от 0 до t, получаем

$$\log\left(c_0 + Q\int_0^t y(s)ds\right) - \log c_0 \leqslant Qt,\ t \in [0,T].$$

Следовательно,

$$c_0 + Q\int_0^t y(s)ds \leqslant c_0 e^{Qt},\ t \in [0,T].$$

Самостоятельно рассмотрите случаи, когда проведенные рассуждения необходимо уточнить (если $c_0 = 0$ и $y(s) = 0$ при $s \in [0,u]$, то брать логарифм в (13.54) нельзя). □

Если $Z = \widetilde{Z}$ п.н., то $c_0 = 0$ в (13.52) и для каждого $t \in [0,T]$ видим, что $\mathsf{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = 0$. Принимая во внимание непрерывность траекторий $|X_t - \widetilde{X}_t|$, заключаем, что процессы X и $\widetilde{X}$ неразличимы на $[0,T]$, т.е.

$$P(X(t,\omega) = \widetilde{X}(t,\omega) \ \text{ для всех } \ t \in [0,T]) = 1. \ \square$$

Решения стохастических дифференциальных уравнений дают обширный и очень важный класс марковских процессов.

Теорема 13.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.6. *Тогда сильное решение стохастического уравнения* (13.32) *является марковским процессом.*

□ В силу следствия 7.6 для доказательства марковости процесса $(X_t,\ t \in [0,T])$ достаточно показать, что для любого $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, каждого $m \in \mathbb{N}$ и произвольного набора точек $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m < u \leqslant t$ выполняется равенство

$$P(X_t \in C \mid X_{1_1}, \ldots, X_{t_m}, X_u) = P(X_t \in C \mid X_u). \tag{13.55}$$

Всюду равенства случайных величин понимаются как равенства почти наверное. Кроме того, считаем все рассматриваемые σ-алгебры пополненными.

Пользуясь леммой 2.3, видим, что достаточно проверить (13.55) для произвольного замкнутого $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Применив рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.5 (после формулы (4.15)), получаем, что достаточно установить следующее: для любой $f \in \mathcal{L}ip_b(\mathbb{R})$ (т. е. ограниченной липшицевой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) справедливо равенство

$$\mathsf{E}(f(X_t) \mid X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}, X_u) = \mathsf{E}(f(X_t) \mid X_u). \tag{13.56}$$

Теперь заметим, что теорема 13.6 очевидным образом переформулируется на случай, когда вместо $[0,T]$ рассматривается промежуток $[u,T]$, $0 \leqslant u < T < \infty$, т. е. когда ищется решение уравнения

$$Z_t = Z + \int\limits_u^t b(s, Z_s)\, ds + \int\limits_u^t \sigma(s, Z_s)\, dW_s \tag{13.57}$$

с начальным условием $Z_u = Z$, измеримым относительно $\mathcal{F}_u$, где $\{W_s,\ s \geqslant 0\}$ – броуновское движение относительно фильтрации $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$. Это решение Z_t обозначим $Z_t(Z)$, $t \in [u,T]$.

Для решения X_t, $t \in [0,T]$, уравнения (13.33) при $t \geqslant u$ имеем

$$\begin{aligned} X_t = X_0 &+ \int\limits_0^t b(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s = \\ &= X_0 + \int\limits_0^u b(s, X_s)\, ds + \int\limits_u^t b(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^u \sigma(s, X_s)\, dW_s + \\ &+ \int\limits_u^t \sigma(s, X_s)\, dW_s = X_u + \int\limits_u^t b(s, X_s)\, ds + \int\limits_u^t \sigma(s, X_s)\, dW_s. \end{aligned} \tag{13.58}$$

Учитывая, что X_u есть $\mathcal{F}_u \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая величина (это очевидно из метода последовательных приближений, дающего решение) и пользуясь единственностью решения уравнения (13.57), получаем, что при каждом начальном условии X_0 почти наверное

$$X_t = Z_t(X_u) \quad \text{для} \quad t \geqslant u. \tag{13.59}$$

Возьмем теперь в качестве начального условия Z для решения уравнения (13.57) константу $x \in \mathbb{R}$. Пользуясь для нашего случая, т. е. при $t \in [u,T]$, аналогом неравенства (13.51) и леммой 13.8, видим, что при каждом t

$$Z_t(y) \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z_t(x), \quad \text{если} \quad y \to x \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{13.60}$$

Для фиксированных $t \in [u,T]$ и $f \in \mathcal{L}ip_b(\mathbb{R})$ положим

$$G(x) = \mathsf{E}f(Z_t(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13.61}$$

В силу (13.60) из определения слабой сходимости получим, что $G(x)$ — функция непрерывная (и ограниченная) на $\mathbb{R}$.

Лемма 13.10. *Для любого $t \in [u,T]$ и любого $x \in \mathbb{R}$ величина $Z_t(x)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_u$.*

□ Решение $Z_t(x)$ (т. е. $Z_t(x,\omega)$, где $t \in [u,T]$, $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$) может быть получено методом последовательных приближений: $Z_t(x)$ есть п.н. предел величин $Z_t^{(n)}(x)$, $n = 0,1,\ldots$, при $n \to \infty$, где $Z_t^{(0)}(x) = x$, а при $n \geqslant 1$

$$Z_t^{(n)}(x) = x + \int\limits_u^t b(s, Z_s^{(n-1)}(x))\,ds + \int\limits_u^t \sigma(s, Z_s^{(n-1)}(x))\,dW_s, \quad t \in [u,T]. \tag{13.62}$$

Легко видеть, что $Z_t^{(n)}(x)$ есть $\mathcal{F}_{[u,t]}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая величина при $n = 0,1,\ldots$, здесь (пополненная) σ-алгебра $\mathcal{F}_{[u,t]} = \sigma\{W_s - W_u,\ s \in [u,t]\}$. Действительно, $x + \int\limits_u^t b(s,x)\,ds$ не зависит от ω, а $\int\limits_u^t \sigma(s,x)\,dW_s$ получается как предел в среднем квадратическом интегралов от простых функций (следовательно, существует подпоследовательность таких интегралов, сходящаяся п.н.). Пользуясь тем, что упомянутые интегралы от простых функций являются $\mathcal{F}_{[u,t]}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми, получаем требуемое утверждение для $n = 0$, сославшись на замечание 4.7. Применяя индукцию и аналог леммы 13.5 (приспособленный к отрезку $[u,T]$ и фильтрации $\mathcal{F}_{[u,t]}$, $t \in [u,T]$), получаем $\mathcal{F}_{[u,t]}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримость $Z_t^{(n)}(x)$ при всех $n \geqslant 1$. Таким образом, $Z_t(x)$ есть $\mathcal{F}_{[u,t]}\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая величина в соответствии с замечанием 4.7.

Остается применить теорему 4.3, в силу которой $\mathcal{F}_u$ и $\mathcal{F}_{[u,t]}$ являются независимыми (если независимы σ-алгебры, то они будут независимы и после пополнения). □

Продолжим доказательство теоремы 13.9. Положим

$$Y^{(n)} = 2^{-n}[2^n X_u], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13.63}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Очевидно,

$$Y^{(n)}(\omega) \to X_u(\omega) \;\text{ при }\; n \to \infty \;\text{ для всех }\; \omega \in \Omega. \tag{13.64}$$

В силу (13.63) величины $Y^{(n)}$ являются $\mathcal{F}_u\,|\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримыми для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем рассмотреть $Z_t(Y^{(n)})$, $t \in [u,T]$, $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства марковости процесса X_t, $t \geqslant 0$, покажем, что левая и правая части формулы (13.56) равны величине $G(X_u)$, где G определено в (13.61).

Возьмем любое событие $A \in \sigma\{X_{t_1},\ldots,X_{t_m},X_u\}$, где точки $t_1,\ldots,t_m,u,t$ фигурируют в (13.55) и (13.56). Тогда для $f \in \mathcal{L}ip_b(\mathbb{R})$

$$\mathsf{E}f(X_t)\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}f(Z_t(Y^{(n)}))\mathbb{1}_A. \tag{13.65}$$

Действительно, пусть

$$|f(x) - f(y)| \mathrm{L}_0 |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Тогда для $t \in [u,T]$, $n \in \mathbb{N}$ и любого события A

$$|\mathsf{E}f(X_t)\mathbb{1}_A - \mathsf{E}f(Z_t(Y^{(n)}))\mathbb{1}_A| \leqslant L_0\mathsf{E}|X_t - Z_t(Y^{(n)})| \leqslant$$
$$\leqslant L_0(\mathsf{E}|Z_t(X_u) - Z_t(Y^{(n)})|^2)^{1/2} \leqslant a_0(\mathsf{E}|X_u - Y^{(n)}|^2)^{1/2} \leqslant a_0 2^{-n},$$

где $a_0 = L_0 \exp\{QT/2\}$ в силу (13.51) и (13.53) и $Q = 3(1+T)L^2$.

Пользуясь счетной аддитивностью интеграла Лебега и леммой 13.10, получим

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A f(Z_t(Y^{(n)})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_A f(Z_t(k2^{-n}))\mathbb{1}_{\{Y^{(n)}=k2^{-n}\}} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_{A\cap\{Y^{(n)}=k2^{-n}\}}\mathsf{E}f(Z_t(k2^{-n})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_{A\cap\{Y^{(n)}=k2^{-n}\}}G(k2^{-n}) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{Y^{(n)}=k2^{-n}\}}G(k2^{-n}) = \mathsf{E}\mathbb{1}_A G(Y^{(n)}). \tag{13.66}$$

Мы учли, что $f(Z_t(k2^{-n}))$ не зависит от $\mathcal{F}_u$, а

$$A \cap \{Y^{(n)} = k2^{-n}\} = A \cap \{k2^{-n} \leqslant X_u < (k+1)2^{-n}\} \in \sigma\{X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_u\} \subset \mathcal{F}_u. \tag{13.67}$$

Принимая во внимание непрерывность и ограниченность функции G, из (13.65), (13.66) и (13.64) выводим

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A f(X_t) = \mathsf{E}\mathbb{1}_A G(X_u). \tag{13.68}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}(f(X_t)\,|\,X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_u) = G(X_u). \tag{13.69}$$

Наконец, применив свойство (7.10) условного математического ожидания, получим

$$\mathsf{E}(f(X_t)\,|\,X_u) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(f(X_t)\mid X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_u)\mid X_u) = \mathsf{E}(G(X_u)\mid X_u) = G(X_u), \tag{13.70}$$

что завершает проверку справедливости (13.56). Теорема 13.9 доказана. □

Следствие 13.11. *Процесс Орнштейна–Уленбека (см. теорему* 13.4) *является не только гауссовским, но и марковским процессом.*

□ Достаточно вспомнить, что процесс Орнштейна–Уленбека был получен как решение уравнения Ланжевена (13.8) с начальным условием $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\alpha)$, см. теорему 13.4. □

Дополнения и упражнения.

Пример Д13.1. Рассмотрим **стохастически возмущенное уравнение роста популяции**

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t, \quad r = \text{const}. \tag{13.71}$$

Точнее говоря, решим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dX_t = rX_t\,dt + \sigma X_t\,dW_t, \tag{13.72}$$

где σ, r — константы.

□ Имеем

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} ds = rt + \sigma W_t, \quad t \geqslant 0. \tag{13.73}$$

Возьмем функцию $h(t,x) = \ln x$, $x > 0$. Заметим, что формула Ито (теорема Д12.12) будет справедлива, как видно из доказательства, если $h\colon [0,\infty) \times (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$, и удовлетворяет всем налагавшимся ранее условиям (когда функция $h(t,x)$ была задана на $[0,\infty) \times \mathbb{R}$), если $X_t(\omega) \in (\alpha,\beta)$ для $t \geqslant 0$ и $\omega \in \Omega$. Итак, считая по смыслу задачи $X_t > 0$ при $t \geqslant 0$, получаем

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)(dX_t)^2 = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}\sigma^2 X_t^2\, dt = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt,$$

откуда

$$\frac{dX_t}{X_t} = d(\ln X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\, dt. \tag{13.74}$$

Следовательно,

$$\ln\frac{X_t}{X_0} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t. \tag{13.75}$$

В итоге

$$X_t = X_0 e^{H_t}, \quad \text{где } H_t = (r - (1/2)\sigma^2)t + \sigma W_t. \tag{13.76}$$

Легко видеть, что если X_0 не зависит от $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$ (см. пояснения после формулы (12.2)), то

$$\mathsf{E} X_t = \mathsf{E} X_0 \exp\{rt\}, \tag{13.77}$$

т. е. средний рост (убывание, если $r < 0$) $\mathsf{E}X_t$ будет таким же, как в случае детерминированной модели (13.71). □

В финансовой математике важную роль играет *геометрическое броуновское движение* $\{X_t,\, t \geqslant 0\}$ вида (13.76), подчиняющееся стохастическому дифференциальному уравнению (13.72) с коэффициентами $r \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Процесс $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ называют броуновским движением с *локальным сносом* $r - \sigma^2/2$ и *диффузией* σ^2. Локальный снос характеризует скорость изменения среднего процесса H, диффузию σ^2 часто называют дифференциальной дисперсией, а в финансовой литературе – *волатильностью.* Видимо П. Самуэльсон ([?]) был первым, кто осознал важность геометрического броуновского движения при описании эволюции цен, используя для него термин "экономическое броуновское движение".

Замечание Д13.2. Определения и результаты, излагавшиеся в лекции 13, ценой некоторых усложнений естественным образом переносятся на многомерный случай. Так, *уравнение* (13.32) *можно понимать как систему,* в которой $X_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)})$, b — векторная, а σ — матричная функции, точнее говоря,

$$b(\cdot,\cdot)\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \sigma(\cdot,\cdot)\colon\ [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{13.78}$$

При этом W_t — m-мерное броуновское движение, т. е. его компоненты $W_t^{(k)}$, $t \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$, являются независимыми стандартными винеровскими процессами; считаем также, что

$$b(t, X_t)\, dt = \begin{pmatrix} b^{(1)}(t, X_t)\, dt \\ \vdots \\ b^{(n)}(t, X_t)\, dt \end{pmatrix},$$
$$\sigma(t, X_t)\, dW_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, X_t) & \ldots & \sigma_{1m}(t, X_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t, X_t) & \ldots & \sigma_{nm}(t, X_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{(1)} \\ \vdots \\ dW_t^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{13.79}$$

Интеграл от векторной функции определяется как вектор из интегралов от компонент, а $\int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ обозначает вектор-функцию с i-й компонентой, равной $\sum\limits_{k=1}^{m}$
$int_0^t \sigma_{ik}(s, X_s)\, dW_s^{(k)}$.

Определение прогрессивной измеримости очевидно переносится на многомерный случай, в качестве фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ берется та, относительно которой $\{W_t,\, t \geqslant 0\}$ – броуновское движение. Теорема 13.6 остается в силе, если в условиях (13.34) и (13.35) модуль b понимать как норму в $\mathbb{R}^n$, а модуль σ понимать как норму матрицы, например, считать, что $|\sigma|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{ik}^2$.

Приведем **многомерный вариант формулы Ито**. Пусть $X_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)})$ — *n-мерный процесс Ито*, т.е. допускающий на $[0, \infty)$ стохастический дифференциал, вида

$$dX_t = f(t, \omega)\, dW_t + g(t, \omega)\, dt, \tag{13.80}$$

где f и g — соответственно матричная и векторная прогрессивно измеримые функции $f = (f_{ik}(t, \omega),\ i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$; $g = (g_1(t, \omega), \ldots, g_n(t, \omega))$. $W_t = (W_1^{(1)}, \ldots, W_t^{(m)})$, иначе говоря

$$dX_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ik}(t, \omega)\, dW_t^{(k)} + g_i(t, \omega)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.81}$$

где при любом $t > 0$, всех $i = 1, \ldots, n$ и $k = 1, \ldots, m$

$$P\Big(\int_0^t |g_i(s, \omega)| ds < \infty\Big) = 1, \tag{13.82}$$

$$P\Big(\int_0^t |f_{ik}(s, \omega)|^2 ds < \infty\Big) = 1. \tag{13.83}$$

Очевидно, определение процесса Ито можно давать и для $t \in [u, v]$, $0 \leqslant u < v < \infty$ или $t \in [u, v)$, $0 \leqslant u < v \leqslant \infty$.

Теорема Д13.3. *Пусть функция* $h\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *такова, что* $h \in C^{1,2}$, *т.е. существуют непрерывные производные* $\partial h/\partial t$ *и* $\partial^2 h/\partial x_i \partial x_j$, $i,j = 1,\dots,n$, *причем*

$$\sup_{t\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}(t,x)\right| < \infty, \quad i = 1,\dots,n. \tag{13.84}$$

Тогда процесс $Y_t = h(t, X_t)$, *где процесс Ито* X_t *определяется согласно* (13.80), *допускает стохастический дифференциал, который задается формулой*

$$dY_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(t,X_t)\,dX_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\,dX_t^{(i)}\,dX_t^{(j)}, \tag{13.85}$$

здесь $dX_t^{(i)}$ *и* $dX_t^{(j)}$, *фигурирующие в* (13.81), *перемножаются по* **правилу**

$$dW_t^{(i)} dW_t^{(j)} = \delta_{ij}\,dt, \quad dW_t^{(i)} dt = dt\cdot dW_t^{(i)} = 0.$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} dY_t = \sum_{k=1}^m \biggl(\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(t,X_t) f_{ik}(t,\omega)\biggr) dW_t^{(k)} + \\ + \left[\frac{\partial h}{\partial t}(t,X_t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(t,X_t) g_i(t,\omega) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\sum_{k=1}^m f_{ik}(t,\omega) f_{jk}(t,\omega)\right] dt. \end{aligned} \tag{13.86}$$

Доказательство формулы Ито см., напр., в [?, гл. 1, § 4е]. По поводу обобщений этой формулы на функции класса $h \notin C^{1,2}$, а также на семимартингалы см., напр., [?], [?].

Приведем, следуя [?], один результат в направлении упомянутых обобщений. Пусть X –стандартное (одномерное) броуновское движение $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$. Пусть функция $h = h(x)$ является абсолютно непрерывной:

$$h(x) = h(0) + \int_0^x f(y)dy,$$

причем пусть (измеримая) функция $f = f(y) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, т.е. для любого $c > 0$

$$\int_{|y|\leqslant c} f^2(y)dy < \infty.$$

Определим $[f(W), W]$ – *квадратическую ковариацию* процессов $f(W)$ и W следующим образом

$$[f(W),W]_t = P - \lim_m \sum_m (f(W_{t^{(n)}(m+1)\wedge t}) - f(W_{t^{(n)}(m)\wedge t}))\cdot(W_{t^{(n)}(m+1)\wedge t} - W_{t^{(n)}(m)\wedge t}).$$

Здесь $P - \lim$ обозначает предел по вероятности, а $T^{(n)} = \{t^{(n)}(m),\, m\in\mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$ – римановские последовательности детерминированных моментов $t^{(n)}(m)$, т.е. $t^{(n)}(m) \leqslant t^{(n)}(m+1)$ для $m \in \mathbb{N}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $t > 0$

$$\sup_m (t^{(n)}(m+1)\wedge t - t^{(n)}(m)\wedge t) \to 0,\ n\to\infty.$$

Важно подчеркнуть, что поскольку процесс $h(W)$ не является, вообще говоря, семимартингалом, нетривиален факт существования предела по вероятности, задающего $[f(W),W]_t$. Один из результатов работы [?] состоит именно в доказательстве существования этого предела.

Теорема Д13.4 (Проттер, Фельмер, Ширяев). *При сделанных выше предположениях о функциях h и f имеет место формула*

$$h(W_t) = h(0) + \int_0^t f(W_s)dW_s + \frac{1}{2}[f(W), W]_t. \tag{13.87}$$

Следствие Д13.5. *Пусть функция $h \in C^2$. Тогда*

$$[f(W), W]_t = \int_0^t f'(W_s)ds$$

и формула (13.87) *переходит в формулу Ито.*

Следствие Д13.6. *Пусть $h(x) = |x|$. Тогда $[f(W), W]_t = 2L_t(0)$, где $L_t(0)$ – локальное время, которое броуновское движение проводит в нуле на отрезке $[0, t]$ (см.* (12.96)*). Тем самым, из* (13.87) *получаем формулу Танака* (12.97)*, которая даст разложение Дуба – Мейера для субмартингала $|W_t|$.*

Упр. 13.7. Пусть $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $X^{(1)} = \{X_t^{(1)},\ t \geqslant 0\}$, $X^{(2)} = \{X_t^{(2)},\ t \geqslant 0\}$ – два процесса, имеющие дифференциалы Ито. Тогда формально

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + dX_t^{(1)} dX_t^{(2)}.$$

Докажите, что если

$$dX_t^{(i)} = b^{(i)}(t, \omega)dt + \sigma^{(i)}(t, \omega)dW_t^{(i)},\ i = 1, 2,$$

где $\{W_t^{(i)},\ t \geqslant 0\}$, $i = 1, 2$ – независимые винеровские процессы, то

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + X_t^{(2)} dX_t^{(1)},$$

если же

$$dX_t^{(i)} = b^{(i)}(t, \omega)dt + \sigma^{(i)}(t, \omega)dW_t,\ i = 1, 2,$$

то

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + \sigma^{(1)}(t, \omega)\sigma^{(2)}(t, \omega)dt.$$

Упр. 13.8. Решите стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = X_t dt + dW_t,\ t \in [0, T]$$

(домножив обе части на e^{-t} и сравнив с $d(e^{-t}X_t)$).

Упр. 13.9. Пусть $V = V(t, x)$ – действительная функция на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, класса $C^{1,2}$. Пусть также $\phi_t = \int_0^t c(s, \omega)ds$, где $c = c(s, \omega)$ – прогресивно измеримая функция, такая что

$$P(\int_0^t |c(s, \omega)|ds < \infty) = 1,\ t > 0.$$

Найдите стохастический дифференциал для процесса $\{e^{-\phi_t}V(t, X_t),\ t \geqslant 0\}$, где $X_t = \{X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\}$ есть n-мерный процесс Ито, компоненты которого имеют стохастические дифференцилы вида (13.81).

Замечание Д13.10. Если условия теоремы 13.6 выполнены на полуинтервале $[0, T)$, то ее утверждение также справедливо на этом промежутке, только в этом случае для решения X_t функция $\mathsf{E}X_t^2$ будет ограничена на каждом отрезке, вложенном в $[0, T)$.

Упр. 13.11. С помощью формулы Ито докажите, что решением (одномерного) уравнения

$$dX_t = \frac{\beta - X_t}{T-t}dt + dW_t,\ t \in [0,T),\ X_0 = \alpha \tag{13.88}$$

является процесс

$$X_t = \alpha(1-t/T) + \beta t/T + (T-t)\int_0^t \frac{dW_s}{T-s}. \tag{13.89}$$

Упр. 13.12. (продолжение упражнения 13.11) Докажите, что $X_t \to \beta$ п.н. при $t \to T-$. Таким образом, решение уравнения (13.88) представляет собой *броуновский мост над отрезком* $[0,T]$ *с закрепленными концами* $X_0 = \alpha$ *и* $X_T = \beta$. Стандартный броуновский мост получается при $T = 1$ и $\alpha = \beta = 0$.

Замечание Д13.13. Существуют обобщения теоремы 13.6 в разных направлениях. Например, вместо (13.34) используется *локальное условие Липшица* по переменной x: при всех $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $|x| \leqslant n$, $|y| \leqslant n$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant L(n)|x-y|$$

для некоторых $L(n) > 0$. Имеются и ослабления этого условия. Кроме того, допускается зависимость (но специального характера) коэффициентов уравнения от ω, рассматриваются случаи зависимости коэффициентов b и σ от "прошлого" (в несколько вольной записи: $b = b(t; X_s, s \leqslant t)$, $\sigma = \sigma(t; X_s, s \leqslant t)$. Об обобщениях на многомерный случай см., напр., [?], [?], [?].

Из различного рода обобщений приведем лишь один, несколько неожиданный результат А.К. Звонкина [?], утверждающий, что **для существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения**

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t \tag{13.90}$$

достаточно лишь измеримости по (t,x) **и равномерной ограниченности коэффициента** $b(t,x)$.

Упр. 13.14. Докажите, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t)dt + dW_t \tag{13.91}$$

с "плохим" коэффициентом $\sigma(x) = \mathrm{sign} x$ имеет и при том единственное сильное решение.

Пример Д13.15. Рассмотрим вместо уравнения (13.91) уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t,\ X_0 = 0, \tag{13.92}$$

где, по-прежнему, $\sigma(x) = \mathrm{sign} x$ и $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ – броуновское движение (здесь будет удобнее использовать обозначение B_t вместо W_t). Докажем, что существуют вероятностные пространства, на которых у этого уравнения есть по крайней мере два сильных решения. Кроме того, на некоторых вероятностных пространствах у этого уравнения может вовсе не быть сильного решения.

□ Рассмотрим на пространстве $C[0,1]$ с винеровской мерой $\mathbf{W}$ непосредственно заданный винеровский процесс $\{W_t,\ t \in [0,1]\}$, т.е. $W_t(\omega) = \omega(t)$, где $\omega(\cdot) \in C[0,1]$. Нам понадобится следующий результат (см., напр., [?])

Теорема Д13.16 (Леви). *Пусть $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – (P-п.н.) непрерывный квадратично интегрируемый мартингал, заданный на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$. Пусть $(B_t^2 - t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ также является мартингалом, т.е.*

$$\mathsf{E}(B_t^2 - B_s^2)|\mathcal{F}_s) = t - s, \ 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{13.93}$$

Тогда $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ есть стандартное броуновское движение.

В силу теоремы 12.11 процесс

$$B_t = \int_0^t \sigma(W_s)dW_s, \ t \in [0,1], \ \sigma(x) = \mathrm{sign} x, \tag{13.94}$$

будет непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом (поясните, почему $\sigma(W_s)$, $s \in [0,1]$ входит в пространство $\mathcal{L}^2[0,1]$, которое порождается с помощью фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,1]}$, т.е. естественной фильтрации броуновского движения W).

Упр. 13.17. Проверьте, что для процесса (13.94) справедливо (13.93) при $s, t \in [0,1]$.

Упр. 13.18. Формула (13.94) означает, что $dB_t = \sigma(W_s)dW_s$. Докажите, что тогда

$$\int_0^t \sigma(W_s)dB_s = \int_0^t \sigma^2(W_s)dW_s, \tag{13.95}$$

т.е. определен интеграл в левой части (13.95) и имеет место равенство.

Учитывая, что $\sigma^2(x) \equiv 1$, из (13.95) получаем

$$\int_0^t \sigma(W_s)dB_s = W_t, \tag{13.96}$$

т.е. W_t является решением уравнения (13.92) со специальным образом подобранным броуновским движением. Но, поскольку $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ при $x \in \mathbb{R}$, то

$$\int_0^t \sigma(-W_s)dB_s = -\int_0^t \sigma(W_s)dB_s = -W_t, \ t \in [0,1].$$

Таким образом, процесс $-W_s$ также есть решение уравнения (13.92). Очевидно, что эти два решения не являются неразличимыми.

Перейдем ко второму утверждению, содержащемуся в примере Д13.15. Предположим, что уравнение (13.92), или, что эквивалентно, уравнение

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s, \ t \in [0,1], \tag{13.97}$$

имеет сильное решение (относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,1]}$, порожденных броуновским движением B). Из теоремы Леви следует (поясните), что процесс $(X_t, \mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,1]}$ является броуновским движением. По формуле Танака (см. (12.97))

$$|X_t| = \int_0^t \sigma(X_s)dX_s + L_t(0), \tag{13.98}$$

где

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}\{|X_s| \leqslant \varepsilon\}ds.$$

Формула (13.97) означает выполнение (13.92), поэтому (поясните)

$$\int_0^t \sigma(X_s)dX_s = \int_0^t \sigma^2(X_s)dB_s = \int_0^t dB_s = B_t,\ t \in [0,1], \tag{13.99}$$

и, согласно (13.98) имеем $B_t = |X_t| - L_t(0)$. Предположение, что процесс X согласован с потоком $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,1]}$, дает включение $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^{|X|}$ при $t > 0$. Остается воспользоваться следующим результатом.

Упр. 13.19. Докажите, что если W – броуновское движение, то соотношение $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^{|W|}$ при всех $t > 0$ невозможно.

Рассмотрение примера Д13.15 завершено. □

Заметим, что М. Барлоу [?] доказал, что у уравнения (13.92) может не быть сильного решения в случае непрерывных ограниченных функций $\sigma = \sigma(x) > 0$.

Найденные в примере Д13.15 два решения W и $-W$ уравнения (13.92) имеют одинаковые распределения в $C[0,1]$. Это обстоятельство объясняет целесообразность вводимой ниже концепции слабого решения.

Определение. Стохастическое дифференциальное уравнение (13.32) с начальным условием μ, где μ –заданная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, имеет *слабое решение* на промежутке $[0,T]$, если найдется фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, найдутся броуновское движение $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ и непрерывный случайный процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, такие, что $\mathcal{L}(X_0) = \mu$ и P п.н. для каждого $t > 0$ выполнено равенство (13.32). Разумеется, вместо отрезка $[0,T]$ можно рассматривать промежутки вида $[u,v]$, где $0 \leqslant u < v < \infty$ или $[u,v)$ для $0 \leqslant u < v < \infty$. Непрерывность процесса X и согласованность с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ обеспечивают и прогрессивную измеримость в силу леммы 12.12.

Важно подчеркнуть, что **в отличие от сильного решения, рассматриваемого на заданном фильтрованном вероятностном пространстве с заданным на нем броуновским движением, в определении слабого такие объекты** (вероятностное пространство и броуновское движение) **не фиксируются, а требуется лишь, чтобы они нашлись.** Очевидно, сильное решение является и слабым.

Слабая единственность решения уравнения (13.32) **означает, что у любых двух решений** (слабых или сильных) **совпадают распределения**, т.е. совпадают конечномерные распределения.

Лемма Д13.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.6 (*см. также замечание Д*13.13). *Тогда решение* (*слабое или сильное*) *уравнения* (13.32) *слабо единственно.*

□ Допустим, что $(\widetilde{X}_t, \widetilde{W}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t)$ и $(\tilde{\tilde{X}}_t, \tilde{\tilde{W}}_t, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t)$ — два слабых решения (13.32). Пусть X_t и Y_t — сильные решения этого уравнения, где в качестве $(W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ берется соответственно $(\widetilde{W}_t, \widetilde{\mathcal{F}}_t)$ и $(\tilde{\tilde{W}}_t, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t)$ $(t \geqslant 0)$. По теореме 13.6 получаем, что $X_t = \widetilde{X}_t$ п.н. и $Y_t = \tilde{\tilde{X}}_t$ п.н. для всех $t \geqslant 0$. Таким образом, достаточно показать, что совпадают к.-м.р. процессов X_t и Y_t, $t \geqslant 0$. Последнее легко выводится из того, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ совпадают распределения процессов $X_t^{(n)}$ и $Y_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$, использующихся для последовательных приближений соответственно процессов X_t и Y_t. □

Естественно ожидать существования слабого решения при менее ограничительных условиях на коэффициенты уравнения (13.32).

Один из первых результатов в этом направлении (см. [?], [?]) формулируется следующим образом. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{13.100}$$

с начальным распределением μ таким, что

$$\int |x|^\gamma \mu(dx) = \mathsf{E}|X_0|^\gamma < \infty \ \text{ для некоторого } \gamma > 2.$$

Если коэффициенты $b = b(x)$ и $\sigma = \sigma(x)$ являются непрерывными ограниченными функциями, то уравнение (13.100) имеет слабое решение.

Замечание Д13.21. В предположении ограниченности и невырожденности коэффициента $\sigma(x)$ утверждение о существовании и единственности (по распределению) слабого решения остается в силе, если потребовать лишь ограниченность и измеримость коэффициента $b(x)$ (см. [?]). Приведенные результаты о слабых решениях допускают обобщения на многомерный случай, на случай коэффициентов, зависящих от прошлого и пр.

Важную роль в теории стохастических дифференциальных уравнений **играет теорема Гирсанова об абсолютно непрерывной замене меры**, для формулировки которой введем необходимые обозначения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ – некоторое фильтрованное вероятностное пространство, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – m-мерное броуновское движение, $W = (W^1, \dots, W^m)$. Пусть $a = (a_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – прогрессивно измеримый m-мерный случайный процесс, $a = (a^1, \dots, a^m)$, такой, что

$$P\left(\int_0^t \|a_s\|^2 ds < \infty\right) = 1, \ t \in [0, T], \tag{13.101}$$

где $\|a_s\|^2 = (a_s^1)^2 + \ldots + (a_s^m)^2$ и $T < \infty$.

Образуем процесс $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, полагая

$$Z_t = \exp\{\int_0^t (a_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|a_s\|^2 ds\}, \tag{13.102}$$

здесь $(a_s, dW_s) := \sum_{k=1}^m a_s^k dW_s^k$.

Лемма Д13.22 (см. [?]). *Если выполнено условие Новикова:*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \|a_s\|^2 ds\right\} < \infty, \tag{13.103}$$

то $\mathsf{E}Z_T = 1$ *и введенный выше процесс* $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *будет равномерно интегрируемым мартингалом.*

В силу положительности Z_t (P-п.н.) и условия $\mathsf{E}Z_T = 1$, на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ можно задать вероятностную меру Q_T, полагая

$$Q_T(A) = \mathsf{E}(\mathbb{1}_A Z_T), \ A \in \mathcal{F}_T. \tag{13.104}$$

Теорема Д13.23 (Гирсанов). *Для введенных выше процессов* W *и* a *определим*

$$B_t = W_t - \int_0^t a_s ds, \ t \in [0, T].$$

Тогда $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *является* m*-мерным броуновским движением на фильтрованном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, Q_T)$.

С помощью этой теоремы **можно решить вопрос о существовании слабого решения стохастического дифференциального уравнения вида**

$$dX_t = a(t, X)dt + dW_t, \ t \in [0, T], \tag{13.105}$$

где функционал $a(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in C[0, T]$, является прогрессивно измеримым, т.е. при любых $t \in (0, T]$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{(s, x) \in [0, t] \times C[0, T] : \ a(s, x) \in D\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{B}(C[0, T]).$$

Опуская обсуждение деталей, заметим, что сейчас мы для примера обратились к более общему случаю, когда необязательно $a(t, x(\cdot)) = b(t, x(t))$, где $b : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Идея заключается в том, чтобы построить $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, Q)$ и на нем задать процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ и броуновское движение $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ такие, что Q-п.н. для каждого $t \in [0, T]$

$$X_t = \int_0^t a(s, X)ds + B_t$$

(при этом, конечно, надо заботиться о проверке должных измеримостей). Для простоты мы положили также $X_0 = 0 \in \mathbb{R}^m$. Выберем $\Omega = (C[0, T])^m$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((C[0, T])^m)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}((C[0, t])^m)$, $t \in [0, T]$ и определим меру $Q = Q_T$ (см. (13.104)). Если при этом считать выполненными условия, обеспечивающие применение теоремы Гирсанова, то

$$B_t = W_t - \int_0^t a(s, W)ds, \ t \in [0, T]$$

будет броуновским движением на отрезке $[0, T]$. Остается положить $X_t = W_t$, чтобы завершить построение слабого решения уравнения (13.105).

Обратимся теперь к **однородной диффузии,** т. е. рассмотрим решение уравнения

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t, \quad t \geqslant s; \quad X_s = x, \tag{13.106}$$

где W_t — m-мерный винеровский процесс, а функции $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям теоремы 13.6, которые в данном случае сводятся к одному требованию: существует $L > 0$, такое что

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{13.107}$$

($|\sigma|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{ik}^2$), из которого вытекает, что для некоторого $c > 0$

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leqslant c(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13.108}$$

Обозначим единственное сильное решение уравнения (13.106) при $t \geqslant s$ через $X_t^{s,x}$. Далее для упрощения изложения положим $n = 1$.

Теорема Д13.24. *Для каждого $x \in \mathbb{R}$ определенный выше процесс $X_t^{s,x}$, $t \geqslant s$, является однородным марковским процессом.*

□ Совершив замену $u = t + v$, имеем (поясните подробнее) для $x \in \mathbb{R}$, $t, h \geqslant 0$,

$$X_{t+h}^{t,x} = x + \int\limits_t^{t+h} b(X_u^{t,x})\, du + \int\limits_t^{t+h} \sigma(X_u^{t,x})\, dW_u = x + \int\limits_0^h b(X_{t+v}^{t,x})\, dv + \int\limits_0^h \sigma(X_{t+v}^{t,x}) d\overline{W}_v, \tag{13.109}$$

где $\overline{W}_v = W_{t+v} - W_t$, $v \geqslant 0$, есть броуновское движение в силу теоремы 4.3.

С другой стороны,

$$X_h^{0,x} = x + \int\limits_0^h b(X_v^{0,x})\,dv + \int\limits_0^h \sigma(X_v^{0,x})\,dW_v. \tag{13.110}$$

Теперь заметим, что процессы W_v и $\overline{W}_v$ имеют одинаковые распределения. Поэтому в силу леммы Д13.20 заключаем, что для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$(X_{t+h}^{t,x})_{h\geqslant 0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_h^{0,x})_{h\geqslant 0}, \tag{13.111}$$

т. е. распределения процессов, фигурирующих в (13.111), совпадают. □

Упр. 13.25. Найдите переходную функцию марковского процесса $\{X_t^{s,x},\ t \geqslant s\}$, являющегося сильным решением уравнения (13.106).

Наряду с интегралом Ито **в ряде задач используется интеграл Стратоновича (или интеграл Фиска – Стратоновича)**, который обозначается

$$\int_0^t f(s,\omega) \circ dW_s(\omega), \tag{13.112}$$

где $\{W_s,\ s \geqslant 0\}$ – броуновское движение, а функция f входит в определенный класс. Чтобы пояснить суть дела скажем, что для некоторого класса функций f интеграл (13.112) строится с помощью интегральных сумм вида

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*,\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

где $0 = t_0 < \ldots < t_N = t$ и $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2$, $i = 0, \ldots, N-1$.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемые по t процессы $W_t^{(n)}(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$ такие, что $W_t^{(n)}(\omega) \to W_t(\omega)$ при $n \to \infty$ для п.в. ω равномерно по t на каждом ограниченном интервале. Тогда (см. [?, с. 27]) при каждом ω решения $X_t^{(n)}(\omega)$ детерминированных уравнений

$$\frac{dX_t^{(n)}}{dt} = b(t, X_t^{(n)}) + \sigma(t, X_t^{(n)})\frac{dW_t^{(n)}}{dt}$$

будут сходиться к некоторой предельной функции $X_t(\omega)$ при $n \to \infty$ для п.в. ω также равномерно по t на ограниченных интервалах.

Как оказалось (см. [?], [?], [?]) процесс X_t является решением уравнения

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s) \circ dW_s. \tag{13.113}$$

Это явилось доводом в пользу интерпретации уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)\dot{W} \tag{13.114}$$

с "белым шумом" $\dot{W}$, как уравнения (13.113), а не уравнения (13.33). Кроме того, замена переменных в интеграле Стратоновича не приводит к появлению дополнительных членов второго порядка, возникающих в формуле Ито (см. (12.50) и (13.85)). Это используется при изучении стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см. [?], [?]). В то же время запас функций, интегрируемых в смысле Стратоновича, является более узким, чем совокупность функций, интегрируемых в смысле Ито (требуются большие ограничения на гладкость коэффициентов). При этом, **если $\sigma(t,x)$ дифференцируема по x, то уравнение** (13.113) **можно переписать как следующее уравнение Ито**

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'_x(s,X_s)\sigma(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s. \tag{13.115}$$

В частности, если $\sigma(s,x)$ не зависит от x, т.е. является функцией $\sigma(s)$, то обе интерпретации уравнения (13.114) **совпадают.** В пользу интеграла Ито выступает и присущее ему важное свойство "независимости от будущего", которое существенно во многих моделях (см., напр., [?]). Подчеркнем также, что интеграл Ито является мартингалом (напр., при условиях теоремы 12.11), а интеграл Стратоновича этим свойством не обладает.